3 Algebraische Eigenschaften des Skalarprodukts

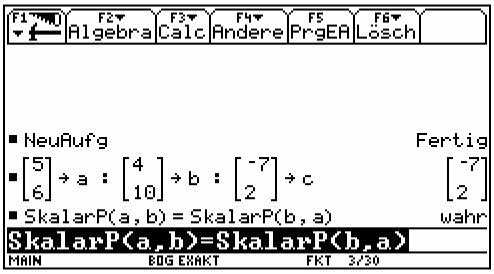
Kopiervorlage von Frank Schumann

Wir wissen: Das Rechnen mit Zahlen beruht auf bestimmten Rechengesetzen. Gesetze dieser Art sind zum Beispiel das Kommutativgesetz der Multiplikation reeller Zahlen, das Assoziativgesetz der Addition rationaler Zahlen, das Distributivgesetz ganzer Zahlen u.a..
In dieser Lektion interessieren wir uns für die Rechengesetze der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 1

Interpretieren Sie die symbolische Ausgabe „wahr“. Welches Rechengesetz wurde in dieser CAS-Applikation genutzt? Formulieren Sie das Rechengesetz in funktionaler Notation, beginnen Sie dabei mit der Formulierung: „Für alle …“.

HOME/



[B 3.1]

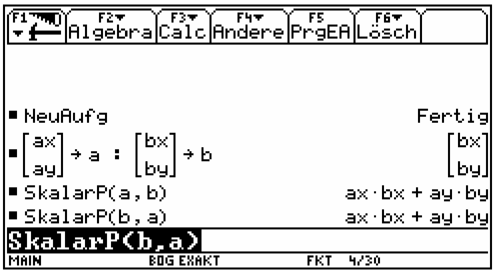
Interpretation: Das Skalarprodukt des geordneten Vektorpaares (a,b) ist gleich dem Skalarprodukt des geordneten Vektorpaares (b,a).

Wir wollen untersuchen, ob die skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^2$ tatsächlich kommutativ, distributiv und assoziativ ist.

Satz 1 (Kommutativität für die skalare Multiplikation für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$)
Für alle Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$: $\text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}(b,a)$.

Beweis: Die Interpretation der letzten beiden Ausgaben vermittelt uns für die Führung des Beweises eine Idee: Das Skalarprodukt der beiden Paare (a,b) und (b,a) wird nach der Definition vereinfacht. Die Übereinstimmung beider Zahlterme erklärt sich dann durch die Rechengesetze reeller Zahlen.

HOME/



[B 3.2]

Beweisführung:

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

Interpretation: Wir erhalten mit den letzten beiden symbolischen Ausgaben zwei identische Terme zur Erzeugung reeller Zahlen.

Beweisfeststellung	**Begründung**
$\text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}\right)$	Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^2$ einsetzen.
$= a_x \cdot a_y + b_x \cdot b_y$	Definition der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}^2$
$= a_y \cdot a_x + b_y \cdot b_x$	Kommutativgesetz der Multiplikation reeller Zahlen
$= \text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}\right)$ $= \text{SkalarP}(b,a)$	Definition der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}^2$

was zu beweisen war

Satz 2 Distributivität für die skalare Multiplikation für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$)

Für alle Vektoren $a,b,c \in \mathbb{R}^2$: $\text{SkalarP}(c, a+b) = \text{SkalarP}(c,a) + \text{SkalarP}(c,b)$.

Lern**auftrag** 1

Beweisen Sie den Satz 3.

Lern**auftrag** 2

Vereinfachen Sie symbolisch zunächst mit dem Rechner:

a) $\text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$,

b) $\text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

Überprüfen Sie Ihre Ausgaben dann ohne Rechner. Was stellen Sie fest?

Satz 3

Die skalare Multiplikation ist **nicht** assoziativ.

Lern**auftrag** 3

Beweisen Sie den Satz 3.

Alte und neue Schreibweisen für die skalare Multiplikation:

(Alte) **Punkt**-Schreibweise	*(Neue)* **Funktionale** Schreibweise
$a \circ b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = r \in \mathbb{R}$	$\text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}\right) = r \in \mathbb{R}$

Um Verwechselungen mit der Multiplikation reeller Zahlen zu vermeiden, ist im Allgemeinen die funktionale CAS-Schreibweise der früheren Punktschreibweise vorzuziehen.

Satz 4
Für alle Vektoren $a,b \in \mathbb{R}^2$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot \text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}(\lambda \cdot a, b)$.

Lern**auftrag** 4
Beweisen Sie den Satz 4.

Lern**auftrag** 5
Gegeben: $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie zunächst durch Kopfrechnen:
a) $\text{c} \cdot \text{SkalarP}(a,b)$; b) $\text{SkalarP}(c,b) \cdot a$; c) $\text{SkalarP}(c,a) \cdot b$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit dem Rechner.

Wir fassen aus der dieser und der vorhergehenden Lektion alle 7 wichtigen algebraischen Eigenschaften über die skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^2$ zusammen:

Für alle Vektoren $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1)	$\text{SkalarP}(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \perp b$	**Orthogonalität**	*(skor)*
(2)	$\text{SkalarP}(a,a) = (\text{Norm}(a))^2$	**Längenbildung**	*(skno)*
(3)	$\text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}(b,a)$	**Kommutativität**	*(skko)*
(4)	$\text{SkalarP}(c,a+b) = \text{SkalarP}(c,a) + \text{SkalarP}(c,b)$	**Distributivität**	*(skdi)*
(5)	$\lambda \cdot \text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}(\lambda \cdot a, b)$	**Homogenität**	*(skho)*
(6)	$\text{SkalarP}(a,a) \geq 0$	**Nichtnegativität**	*(sknn)*
(7)	$\text{SkalarP}(a,a) = 0$ nur für $a = \vec{0}$	**Nichtdegeneriertheit**	*(sknd)*

Lern**auftrag** 6
Weisen Sie mithilfe der skalaren Multiplikation nach, dass die Vektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$, beide aus $\mathbb{R}^2$ paarweise orthogonalen **Einheits**vektoren sind.
Hinweis: Einheitsvektoren haben die Norm 1.

Lernauftrag 7

Übersetzen Sie die Formel

$$(a+b)^2 = (a+b)\circ(a+b) = a\circ a + 2\cdot a\circ b + b\circ b$$

in die funktionale Schreibweise für skalare Multiplikation. Begründen Sie die Formel in der funktionalen Schreibweise.

Lernauftrag 8

Übersetzen Sie alle 6 algebraischen Formeln in die alte Schreibweise für skalare Multiplikation.

Lernauftrag 9

Übersetzen Sie die Aussage: Es gibt eine reelle Zahl r: $\text{SkalarP}(a-r\cdot b,b)=0;\ a,b\in\mathbb{R}^2$.

a) in die alte Punktschreibweise für skalare Multiplikation,
b) in eine Skizze.
c) Bestimmen Sie die Zahl r.

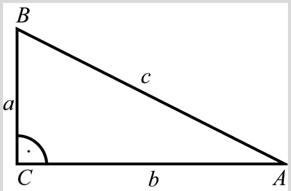
Aufgabe 1

Beweisen Sie den Satz von Pythagoras mithilfe der Eigenschaften des Skalarprodukts.

In der Sekundarstufe I haben wir den Satz von Pythagoras u.a. so formuliert:

Satz von Pythagoras *(elementargeometrische Formulierung)*
In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Seite c als Hypotenuse gilt die Gleichung $a^2+b^2=c^2$.

Die Variablen a, b und c stehen für die Größe Länge.

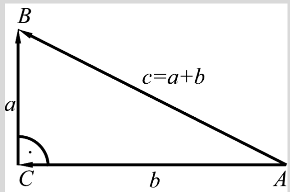


[B 3.3]

Wir übersetzen den Satz von Pythagoras in eine *vektorielle Formulierung*. Die Variablen a und b stehen **jetzt** für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und beschreiben mit ihrem Betrag, Richtung und Richtungssinn das Dreieck ABC. Dabei gilt: $a\perp b$.

Satz von Pythagoras *(vektorielle Formulierung)*
In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $a\perp b$ gilt die Gleichung: $\left(\text{Norm}(a)\right)^2+\left(\text{Norm}(b)\right)^2=\left(\text{Norm}(a+b)\right)^2$.

Dabei liefert die Funktion Norm die Längenmaßzahl (bei gleicher Einheit!) der jeweiligen Vektoren.



[B 3.4]

Bemerkung: Beide Formulierungen zum Satz von Pythagoras sind gleichwertig. Lediglich in der Wahl der Ausdrucksmittel unterscheiden sich beide Formulierungen.

Lern**auftrag** 10

Testen Sie die nachfolgende CASA. Skizzieren Sie das Dreieck mit den Vektoren f und g und erläutern Sie daran die Bedeutung der CAS-Notation $was \mid fx = \dfrac{-fy \cdot gy}{gx}$.

NeuAufg

$$\begin{bmatrix} fx \\ fy \end{bmatrix} \to f : \begin{bmatrix} gx \\ gy \end{bmatrix} \to g$$

$$\left(\left(\mathrm{Norm}(f)\right)^2 + \left(\mathrm{Norm}(g)\right)^2 = \left(\mathrm{Norm}(f+g)\right)^2\right) \to was$$

$$was \mid fx = \frac{-fy \cdot gy}{gx}$$

[B 3.5]

Wir bereiten den Beweis für den Satz von Pythagoras in seiner vektoriellen Formulierung vor.

Voraussetzung:	Dreieck ABC mit $a \perp b$	V
Behauptung:	$\left(\mathrm{Norm}(a)\right)^2 + \left(\mathrm{Norm}(b)\right)^2 = \left(\mathrm{Norm}(a+b)\right)^2$	B

Beweismittel: 7 Eigenschaften des Skalarprodukts: (skor), (skno), (skko), (skdi), (skho), (sknn), (sknd).

Beweisidee: Betrachten wir die CASA im Bild [Abb. 5] etwas genauer, dann können wir aufgrund einer erweiterten CAS-Applikation (siehe [Abb.6]) erkennen: Insbesondere die Eigenschaften der **Längenbildung** (skno) und die der **Orthogonalität** (skor) für skalare Multiplikation sind für unseren Beweis von besonderer Nützlichkeit.

Wir erweitern die CASA durch die „*wie*-Notation".

NeuAufg

$$\begin{bmatrix} fx \\ fy \end{bmatrix} \to f : \begin{bmatrix} gx \\ gy \end{bmatrix} \to g$$

$$\begin{array}{ccccccc} (& \boxed{\left(\mathrm{Norm}(f)\right)^2} & + & \boxed{\left(\mathrm{Norm}(g)\right)^2} & = & \boxed{\left(\mathrm{Norm}(f+g)\right)^2} &) \to was \\ & \Big\updownarrow skno & & \Big\updownarrow skno & & \Big\updownarrow skno & \\ (& \boxed{\mathrm{SkalarP}(f,f)} & + & \boxed{\mathrm{SkalarP}(g,g)} & = & \boxed{\mathrm{SkalarP}(f+g,f+g)} &) \to wie \end{array}$$

$$wie \mid fx = \frac{-fy \cdot gy}{gx} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l} \textit{Orthogonalität (skor):} \\ f \perp g \Leftrightarrow \mathrm{SkalarP}(f,g) = 0 \end{array}}$$

[B 3.6]

Lern**auftrag** 11
Testen Sie die erweiterte CASA und interpretieren Sie die letzte Ausgabe.

Wir beweisen den Satz von Pythagoras in seiner vektoriellen Formulierung und das mithilfe vektorieller Beweismittel.

Beweisführung:

Beweisfeststellung	**Begründung**
Für das Quadrat der Länge der Hypotenuse können wir schreiben: $\left(\text{Norm}(a+b)\right)^2$.	$c=b+a=a+b$
$\left(\text{Norm}(a+b)\right)^2 = \text{SkalarP}(a+b,a+b)$	*(skno)*
$= \text{SkalarP}(a+b,a) + \text{SkalarP}(a+b,b)$	*(skdi)*
$= \text{SkalarP}(a,a) + \text{SkalarP}(b,a) + \text{SkalarP}(a,b) + \text{SkalarP}(b,b)$	*(skdi)*
$= \text{SkalarP}(a,a) + \text{SkalarP}(b,b)$	V, *(skor)* $\text{SkalarP}(b,a) = \text{SkalarP}(a,b) = 0$
$= \left(\text{Norm}(a)\right)^2 + \left(\text{Norm}(b)\right)^2$	*(skno)*

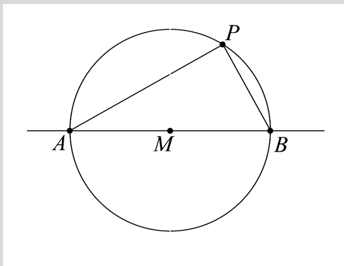
was zu beweisen war.

Lern**auftrag** 12
Bilden Sie die Umkehrung zum Satz von Pythagoras und beweisen Sie die Umkehrung mithilfe der Eigenschaften des Skalarprodukts.

Aufgabe 2
Beweisen Sie den Satz von Thales mithilfe der Eigenschaften des Skalarprodukts.

Satz von Thales *(elementargeometrische Formulierung)*
Wenn $\overline{AB}$ der Durchmesser des Kreises k ist und P auf der Kreislinie mit $P \neq A$ und $P \neq B$ liegt, dann ist der Winkel $\sphericalangle BPA$ ein rechter Winkel.

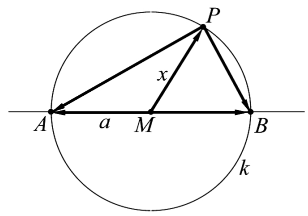
Kurz: Jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises k ist ein rechter Winkel.



[B 3.7]

Beweis:
Wir arbeiten mit Vektoren (siehe [Abb. 8]):

$$a := \overrightarrow{MA} \in \mathbb{R}^2;\; x := \overrightarrow{MP} \in \mathbb{R}^2 .$$



[B 3.8]

Eigenschaften von a und x:

$$\boxed{\text{Norm}(a) = \text{Norm}(x) = r} .$$

Dabei gibt $r \in \mathbb{R}_+$ die Radiuslänge des Kreises k an.

Voraussetzungen:
V1: $\overline{AB}$ Durchmesser von k
V2: P auf k mit $P \neq A$ und $P \neq B$

Behauptung:
$\text{SkalarP}\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = 0$

Beweisführung:

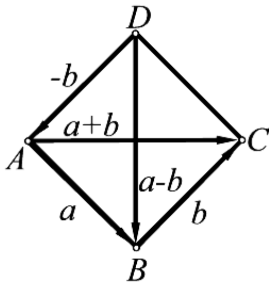
Beweisfeststellung	**Begründung**
$\text{SkalarP}\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = \text{SkalarP}(a - x, -a - x)$	$\overrightarrow{PA} = a - x$, $\overrightarrow{PB} = -a - x$
$= \text{SkalarP}\left(a - x, (-1) \cdot (a + x)\right)$	Distributivgesetz der Addition reeller Zahlen
$= \ldots$	(skho)
$= \ldots$	(skdi)
$= \ldots$	…

Lern**auftrag** 13
Geben Sie eine vektorielle Formulierung für den Satz von Thales an.

Lern**auftrag** 14
Vervollständigen Sie die angefangene Beweisführung in der Tabelle.

Lern**auftrag** 15
Beweisen Sie:
a) Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.
b) Im Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.

Rhombus: Ein Parallelogramm heißt Rhombus, falls die benachbarten Seiten gleich lang sind.	Rechteck: Ein Parallelogramm heißt Rechteck, falls ein Innenwinkel ein rechter Winkel ist.
Voraussetzung: $\text{Norm}(a) = \text{Norm}(b)$	Voraussetzung: $a \perp b$



[B 3.9]

Behauptung: $\operatorname{SkalarP}(a+b, a-b) = 0$

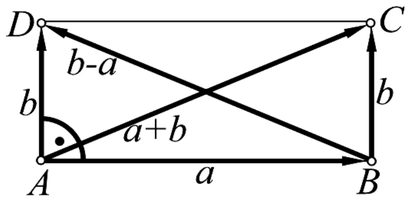
Beweisanfang:

$$\operatorname{Norm}(a) = \operatorname{Norm}(b)$$

$$(\operatorname{Norm}(a))^2 = (\operatorname{Norm}(b))^2$$

$$(\operatorname{Norm}(a))^2 - (\operatorname{Norm}(b))^2 = 0$$

… … … … …



[B 3.10]

Behauptung: $\operatorname{Norm}(b-a) = \operatorname{Norm}(a+b)$

Beweisanfang:

$$a \perp b$$

Nach dem Satz von Pythagoras:

Im Dreieck ABC:

$$(\operatorname{Norm}(a))^2 + (\operatorname{Norm}(b))^2 = (\operatorname{Norm}(a+b))^2$$

Im Dreieck ABD: **… … … … …**

Lern**auftrag** 16

Beweisen Sie:

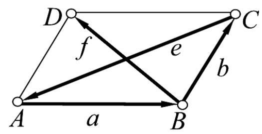
a) den Kathetensatz mit vektoriellen Mitteln

b) den Höhensatz mit vektoriellen Mitteln

Lern**auftrag** 17

Beweisen Sie: Im Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der doppelten Summe aus den Quadraten zweier anliegender Seiten.

Hinweis: $e^2 + f^2 = \ldots\ldots\ldots = 2 \cdot \left(\ldots^2 + \ldots^2\right)$



[B 3.11]

Lern**auftrag** 18

Beweisen Sie: Wenn die beiden Vektoren v und w aus $\mathbb{R}^2$ gleiche Norm haben, dann sind die Vektoren $v+w$ und $v-w$ orthogonal zueinander.

Literaturquellen:

[1] „Das Einmaleins des Voyage™ 200“, Frank Schumann, Math-College®, erschienen 2004 im Schumann`s Verlagshaus, Wertheim, 2. berichtigte Auflage.

Impressum und Rechte:
Herausgeber: Jens Carl, Wertheim am Main
© Schumann`s Verlagshaus, Am Wartberg 6, 97877 Wertheim am Main
Telefon: 0 93 42 / 85 963 85
Fax: 0 93 42 / 85 963 87
E-Mail: mathe-innovativ@math-college.de
Web: www.schumanns-verlagshaus.de
Redaktion: mathe-innovativ - In Mathe einfach besser:
Jens Carl (verantwortlicher Redakteur),
Satz und Druck: Schumann`s Verlagshaus Wertheim am Main
Anzeigenverwaltung: Jens Carl
Zur Zeit gilt die Anzeigenpreisliste Nr. 1 vom 01.04.2005.
Redaktionsschluss der Ausgabe 01/06: 15.01.2006
Auslieferung der Ausgabe 01/06: 15. 01. 2006
Redaktionsschluss der nächsten Ausgabe 02/06: 15.04.2005
Erscheinungsweise: viermal pro Jahr