3 Das Operatormodell in Tafelbildern

von Frank Schumann

Das *Operatormodell*, auch *Pfeilrechnung* genannt, ist vielen Lehrern aus der Einführung in die Bruchrechnung bekannt. Es ist auf Grund seiner Grundstruktur:

$$\boxed{Startgröße} \xrightarrow{Operator\_1} Zwischengröße\_1 \xrightarrow{Operator\_2} Zwischengröße\_2 \ldots \xrightarrow{Operator\_n} \boxed{Zielgröße}$$

mit $n \in \mathbb{N}^*$

auf viele Bereiche der Schulmathematik anwendbar. Start- und Zielgröße können auch Zahlen sein. Operatoren bestehen aus einem Funktionssymbol und einer Zahl oder Größe.

Beispiel 1:

Übliche zweistellige Funktionsnotation	Pfeilrechnung
$3+4=7$	$3 \xrightarrow{+4} 7$
$(-8+6)^2$	$-8 \xrightarrow{+6} -2 \xrightarrow{(\ )^2} 4$

Es gibt auch Pfeile in umgekehrter Richtung.

Beispiel 2:

Übliche zweistellige Funktionsnotation	Pfeilrechnung
$5+10=10+5$ *Summanden dürfen vertauscht werden.*	$5 \xrightarrow{+10} \square \xleftarrow{+5} 10$ *Austausch von Startzahl und Operator*
$\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$ oder $\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$ *Umkehroperationen*	$\frac{2}{3} \underset{-1}{\overset{+1}{\rightleftarrows}} \frac{5}{3}$ *Umkehrpfeil mit Umkehroperator*

Wesentliche Vorteile des Operatormodells gegenüber anderen Rechenmodellen sind:

- die Vereinfachung einer Vielzahl an Rechenregeln durch die Rückführung einer zweistelligen Funktion in eine einstellige;

- die Verbindung von Operation und Umkehroperation mittels Operator und Gegenoperator;
- die einfache Beschreibung eines Tascherechnerablaufplanes (kurz: TRAP), anstelle einer unübersichtlichen und zeitintensiven Notation mit Tastendarstellungen;
- die Darstellung einer Iteration, beispielsweise zur Berechnung einzelner Glieder einer rekursiv definierten Zahlenfolge (*auch bei einfachen Wachstumsfunktionen*);
- die korrekte Darstellung des Gleichheitszeichens als Ergebnisoperator innerhalb einer Rechenkette.

Ich habe einen Ausschnitt an Tafel- bzw. Foliebildern aus meinem Unterricht zusammengestellt, die sich schon mehrfach im Unterricht der Klassenstufen 5 bis 7 bewährt haben.

Vergleichen von rationalen Zahlen in Bruchschreibweise

Zwei positive Zahlen: $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} \underset{\textit{kürzen mit } 2}{\overset{\textit{erweitern mit } 2}{\rightleftarrows}} \frac{2}{4}$ und $2 < 3$.
Zwei negative Zahlen: $-\frac{1}{2} > -\frac{3}{4}$	① $\frac{1}{2}$ liegt weiter links als $\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{spiegeln an 0}} -\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{spiegeln an 0}} -\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{1}{2}$ liegt weiter rechts als $-\frac{3}{4}$. Also dreht sich auch das Relationszeichen um.

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8} \underset{-\frac{2}{8}}{\overset{+\frac{2}{8}}{\rightleftarrows}} \frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$
KG+	Addition ist **Umkehrung** der Subtraktion	
$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8} \underset{-\frac{3}{8}}{\overset{+\frac{3}{8}}{\rightleftarrows}} \frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}$

Regel: Man **addiert** (*bzw. subtrahiert*) ***gleichnamige*** Brüche, indem man die die Zähler **addiert** (*bzw. subtrahiert*) und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Addition und Subtraktion ganzer Zahlen in 3 Regeln

1 Ist der Operator *positiv* / *negativ* so lege Pfeil nach *rechts* / *links*.

$\boxed{\begin{array}{l} -12+8=-4 \\ -12 \xrightarrow{+8} -4 \end{array}}$; $\boxed{\begin{array}{l} -12+12=0 \\ -12 \xrightarrow{+12} 0 \end{array}}$ | $\boxed{\begin{array}{l} 50-84=-34 \\ -34 \xleftarrow{-84} 50 \end{array}}$; $\boxed{\begin{array}{l} 19-19=0 \\ 0 \xleftarrow{-19} 19 \end{array}}$

2 Das Vorzeichen ändert sich nur dann, wenn die Null überschritten wird.

3 Treten *Vor- und Rechenzeichen* auf, so löse zuerst die Klammer auf:

$3+(-8)=3-8$	Steht ein + vor einer Klammer, so setze das *Vorzeichen* als *neues Rechenzeichen*
$3-(-8)=3+8$	Steht ein − vor einer Klammer, so setze das ***entgegengesetzte*** *Vorzeichen* als *neues Rechenzeichen*

Setze dann bei Regel ① fort.

Der richtige Gebrauch des Gleichheitszeichens

Aufgabe: Ich denke mir eine Zahl x.
Ich addiere dann 10.
Ich verdopple das Zwischenergebnis.
Ich vermindere das Zwischenergebnis um 8.
Ich erhalte 12.
Wie heißt meine Zahl x?

***Hin**pfeile führen zur Gleichung:*

$$x \xrightarrow{+10} x+10 \xrightarrow{\cdot 2} 2\cdot(x+10) \xrightarrow{-8} 2\cdot(x+10)-8 \xrightarrow{=} 12$$

Es gilt die Gleichung: $2\cdot(x+10)-8=12$

***Rück**pfeile führen zur Lösung:*

$$0 \xleftarrow[-10]{} 10 \xleftarrow[\div 2]{} 20 \xleftarrow[+8]{} 12$$

Die gedachte Zahl ist die 0.

Prozentrechnung *(Besimmen des Prozentwertes)*

Aufgabe 1:
Wie viel sind 14% von 850 kg?

Gesucht: Grundwert W in €

(1) Umwandlung der Prozentschreibweise:

$$\begin{aligned} 14\% &= \frac{14}{100} \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

(2) Pfeilrechnung/GTR:

$$850 \xrightarrow{\cdot 0.14} 119$$

(3) Antwortsatz:
14% von 850 kg sind 119kg.

Neue Begriffe zur Prozentrechnung

Beispiel (*siehe Aufgabe 1*)

Grundwert, *G*	**Prozentwert, *W***	**Prozentsatz, *p***
$G = 850\,kg$ $850 \xrightarrow{\cdot 100\%} 850$	$W = 119\,kg$ $850 \xrightarrow{\cdot 14\%} 119$	$p = 14$ (ohne Prozentzeichen!) $850 \xrightarrow{\cdot 14\%} 119$

Merke:
Der Grundwert *G* ist eine *spezieller* Prozentsatz *W*.
Dem Grundwert *G* ist *stets* 100% = 1 zugeordnet.

Prozentrechnung *(Besimmen des Grundwertes)*

Aufgabe 2:
56% entsprechen 870 €. Wie viel entspricht dann 100%?

Gesucht: Grundwert *G* in €

(1) Umwandlung der Prozentschreibweise:
$56\% = 0.56$

(2) Pfeilrechnung/GTR mit Rückpfeil:

$$G \xrightarrow{\cdot 0.56} 870$$

$$1553.57 \xleftarrow[\div 0.56]{} 870$$

(3) Antwortsatz:
100% entspricht 1553.57€.

Prozentrechnung *(Besimmen des Prozentsatzes)*

Aufgabe 3:
56 Kinder gehören einem Sportverein mit insgesamt 122 Mitgliedern an. Welchen Anteil bildet die Zahl der Kinder zu der Zahl aller Mitglider des Sportvereins?

Gesucht: Grundwert p

1 Umwandlung der Prozentschreibweise:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

2 Pfeilrechnung/GTR:

$$122 \xrightarrow{\cdot \frac{p}{100}} 56$$

$$122 \cdot \frac{p}{100} = \frac{p}{100} \cdot 122 \quad \text{„\textit{Faktoren vertauschen}“}$$
$$= 56$$

Nach dem *Kommutativgesetz der Multiplikation* kann man dann auch schreiben:

$$\frac{p}{100} \xrightarrow{\cdot 122} 56$$

Rückpfeil:

$$\frac{45.9}{100} \xleftarrow[\div 122]{} 56$$

$$0.459 = \frac{45.9}{100}$$

3 Antwortsatz:

45.9% aller Mitglieder des Sportvereins sind Kinder.

Grundaufgaben der Prozentrechnung

Präge Dir die 4 Pfeilrechnungen gut ein:

$$G \underset{\div \frac{p}{100}}{\overset{\cdot \frac{p}{100}}{\rightleftarrows}} W \qquad \textit{oder} \qquad \frac{p}{100} \underset{\div G}{\overset{\cdot G}{\rightleftarrows}} W$$

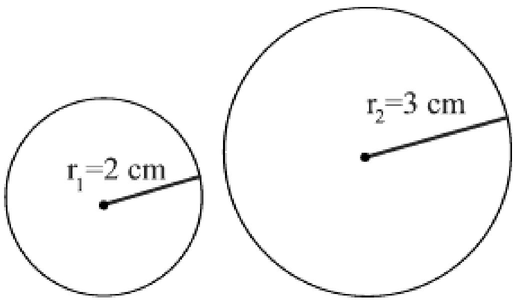
Merke:

(1) *G* und *100 %* gehören stets zusammen.

(2) *G* und *W* haben stets die <u>*gleiche*</u> Einheit.

(3) *p* ist eine Zahl <u>*ohne*</u> Einheit.

Flächeninhalt *A* eines Kreises



Kleiner Kreis mit r_1:

$$2 \xrightarrow{(\ )^2} 4 \xrightarrow{\cdot 3.14} 12.56$$

Großer Kreis mit r_2:

$$3 \xrightarrow{(\ )^2} 9 \xrightarrow{\cdot 3.14} 28.26$$

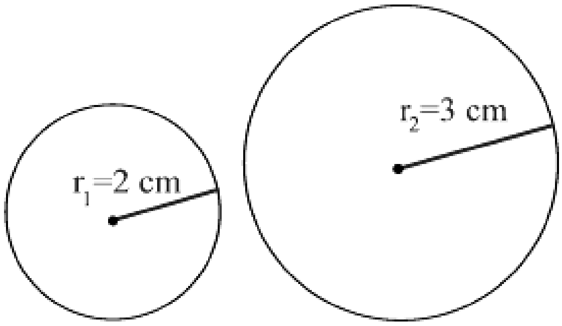
Je größer der Radius ***r*** ist, desto größer ist auch der Flächeninhalt ***A***.

Radius ***r*** in cm	2	3
Flächeninhalt ***A*** in cm^2	12.56	28.26

Es gilt: $A \div r^2 = 3.14 \approx \pi$.

Die Zahl π („Pi“) ist eine *mathematische Konstante*. $\pi \approx 3.14159265......$

Umfang *U* eines Kreises



Kleiner Kreis mit r_1:

$$2 \underset{\div 6.28}{\overset{\cdot 6.28}{\rightleftarrows}} 12.56$$

Großer Kreis mit r_2:

$$3 \underset{\div 6.28}{\overset{\cdot 6.28}{\rightleftarrows}} 18.84$$

Je größer der Radius ***r*** ist, desto größer ist auch der Umfang ***U***.

Radius ***r*** in cm	2	3
Umfang ***U*** in cm	12.56	18.84

Es gilt: $U \div r = 6.28 \approx 2 \cdot \pi$.
Die Zahl π („Pi“) entspricht dem Umfang eines *Halbkreises* mit der *Radiuslänge 1*.

Wenn die Äquivalenzumformungen den Schülern noch nicht bekannt sind:

Lösen einfacher Gleichungen

Aufgabe: Löse die Gleichung $2 \cdot (9 - x) = -12$.

Gleichung:
$2 \cdot (9 - x) = -12$

Übersetzung in Pfeilrechnung:

$$\underset{\textit{Start}}{\boxed{x}} \xrightarrow{\cdot(-1)} -x \xrightarrow{+9} -x + 9 \xrightarrow{\cdot 2} \underset{\textit{Ziel}}{\boxed{-12}}$$

$\downarrow$

Aufbau der Gegenpfeilrechnung:

$$\underset{\textit{Ziel}}{\boxed{15}} \xleftarrow{\div(-1)} -15 \xleftarrow{-9} -6 \xleftarrow{\div 2} \underset{\textit{Start}}{\boxed{-12}}$$

Probe für $x = 15$:
$2 \cdot (9 - 15) = -12$
$2 \cdot (-6) = -12$ *w.A.*

Lösung: $x = \underline{\underline{15}}$

Literaturquellen:
[1] „Das Einmaleins des Voyage™ 200“, Frank Schumann, Math-College®, erschienen 2004 im Schumann`s Verlagshaus, Sangerhausen, 2. berichtigte Auflage.

Impressum und Rechte:
Herausgeber: Jens Carl, Wertheim am Main
© Schumann`s Verlagshaus, Am Wartberg 6, 97877 Wertheim am Main
Telefon: 0 93 42 / 85 963 85
Fax: 0 93 42 / 85 963 87
E-Mail: mathe-innovativ@math-college.de
Web: www.schumanns-verlagshaus.de
Redaktion: mathe-innovativ - In Mathe einfach besser:
Jens Carl (verantwortlicher Redakteur),
Satz und Druck: Schumann`s Verlagshaus Wertheim am Main
Anzeigenverwaltung: Jens Carl
Zur Zeit gilt die Anzeigenpreisliste Nr. 1 vom 01.04.2005.
Redaktionsschluss der Ausgabe 02/05: 15.08.2005
Auslieferung der Ausgabe 02/05: 26. 09. 2005
Redaktionsschluss der nächsten Ausgabe 03/05: 15.09.2005
Erscheinungsweise: monatlich, außer Juli und August