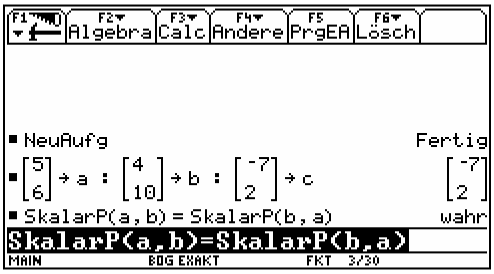
Algebraische Eigenschaften des Skalarprodukts

Wir wissen: Das Rechnen mit Zahlen beruht auf bestimmten Rechengesetzen. Gesetze dieser Art sind zum Beispiel das *Kommutativgesetz der Multiplikation reeller Zahlen*, das *Assoziativgesetz der Addition rationaler Zahlen*, das *Distributivgesetz ganzer Zahlen* u.a..
In dieser Lektion interessieren wir uns für die *Rechengesetze der skalaren Multiplikation in* $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 1

Interpretieren Sie die symbolische Ausgabe „wahr“. Welches Rechengesetz wurde in dieser CAS-Applikation genutzt? Formulieren Sie das Rechengesetz in funktionaler Notation, beginnen Sie dabei mit der Formulierung: „*Für alle …*“.

HOME/



[Abb. 1]

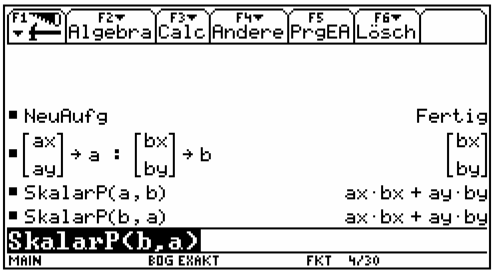
Interpretation: Das Skalarprodukt des geordneten Vektorpaares (a,b) ist gleich dem Skalarprodukt des geordneten Vektorpaares (b,a).

Wir wollen untersuchen, ob die skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^2$ tatsächlich kommutativ, distributiv und assoziativ ist.

Satz 1 (Kommutativität für die skalare Multiplikation für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$)
Für alle Vektoren $a,b \in \mathbb{R}^2$: $\text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}(b,a)$.

Beweis: Die Interpretation der letzten beiden Ausgaben vermittelt uns für die Führung des Beweises eine Idee: Das Skalarprodukt der beiden Paare (a,b) und (b,a) wird nach der Definition vereinfacht. Die Übereinstimmung beider Zahlterme erklärt sich dann durch die Rechengesetze reeller Zahlen.

HOME/



[Abb. 2]

Beweisführung:
$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$

Interpretation: Wir erhalten mit den letzten beiden symbolischen Ausgaben zwei identische Terme zur Erzeugung reeller Zahlen.

Beweisfeststellung	**Begründung**
$\text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}\right)$	Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^2$ einsetzen.
$= a_x \cdot a_y + b_x \cdot b_y$	Definition der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}^2$
$= a_y \cdot a_x + b_y \cdot b_x$	Kommutativgesetz der Multiplikation reeller Zahlen
$= \text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}\right)$ $= \text{SkalarP}(b,a)$	Definition der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}^2$

was zu beweisen war

Satz 2 Distributivität für die skalare Multiplikation für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$)

Für alle Vektoren $a,b,c \in \mathbb{R}^2$: $\text{SkalarP}(c, a+b) = \text{SkalarP}(c,a) + \text{SkalarP}(c,b)$.

Lern**auftrag** 1
Beweisen Sie den Satz 3.

Lern**auftrag** 2
Vereinfachen Sie symbolisch zunächst mit dem Rechner:

a) $\text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$,

b) $\text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

Überprüfen Sie Ihre Ausgaben dann ohne Rechner. Was stellen Sie fest?

Satz 3

Die skalare Multiplikation ist **nicht** assoziativ.

Lern**auftrag** 3
Beweisen Sie den Satz 3.

Alte und neue Schreibweisen für die skalare Multiplikation:

(Alte) **Punkt**-Schreibweise	*(Neue)* **Funktionale** Schreibweise
$a \circ b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = r \in \mathbb{R}$	$\text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}\right) = r \in \mathbb{R}$

Um Verwechselungen mit der Multiplikation reeller Zahlen zu vermeiden, ist im Allgemeinen die funktionale CAS-Schreibweise der früheren Punktschreibweise vorzuziehen.

Satz 4

Für alle Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot \text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}(\lambda \cdot a, b)$.

Lern**auftrag** 4

Beweisen Sie den Satz 4.

Lern**auftrag** 5

Gegeben: $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie zunächst durch Kopfrechnen:

a) $\text{c} \cdot \text{SkalarP}(a,b)$; b) $\text{SkalarP}(c,b) \cdot a$; c) $\text{SkalarP}(c,a) \cdot b$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit dem Rechner.

Wir fassen aus der dieser und der vorhergehenden Lektion alle 7 wichtigen algebraischen Eigenschaften über die skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^2$ zusammen:

Für alle Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

(1)	$\text{SkalarP}(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \perp b$	**Orthogonalität**	*(skor)*
(2)	$\text{SkalarP}(a,a) = \left(\text{Norm}(a)\right)^2$	**Längenbildung**	*(skno)*
(3)	$\text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}(b,a)$	**Kommutativität**	*(skko)*
(4)	$\text{SkalarP}(c, a+b) = \text{SkalarP}(c,a) + \text{SkalarP}(c,b)$	**Distributivität**	*(skdi)*
(5)	$\lambda \cdot \text{SkalarP}(a,b) = \text{SkalarP}(\lambda \cdot a, b)$	**Homogenität**	*(skho)*
(6)	$\text{SkalarP}(a,a) \geq 0$	**Nichtnegativität**	*(sknn)*
(7)	$\text{SkalarP}(a,a) = 0$ nur für $a = \vec{0}$	**Nichtdegeneriertheit**	*(sknd)*

Lern**auftrag** 6

Weisen Sie mithilfe der skalaren Multiplikation nach, dass die Vektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$, beide aus $\mathbb{R}^2$ paarweise orthogonalen **Einheits**vektoren sind.

Hinweis: Einheitsvektoren haben die Norm 1.

Lern**auftrag** 7
Übersetzen Sie die Formel

$$(a+b)^2 = (a+b)\circ(a+b) = a\circ a + 2\cdot a\circ b + b\circ b$$

in die funktionale Schreibweise für skalare Multiplikation. Begründen Sie die Formel in der funktionalen Schreibweise.

Lern**auftrag** 8
Übersetzen Sie alle 6 algebraischen Formeln in die alte Schreibweise für skalare Multiplikation.

Lern**auftrag** 9
Übersetzen Sie die Aussage: Es gibt eine reelle Zahl r: $\text{SkalarP}(a - r\cdot b, b) = 0;\ a, b \in \mathbb{R}^2$.

a) in die alte Punktschreibweise für skalare Multiplikation,
b) in eine Skizze.
c) Bestimmen Sie die Zahl r.

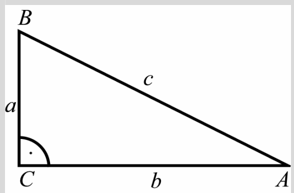
Aufgabe 1
Beweisen Sie den Satz von Pythagoras mithilfe der Eigenschaften des Skalarprodukts.

In der Sekundarstufe I haben wir den Satz von Pythagoras u.a. so formuliert:

Satz von Pythagoras *(elementargeometrische Formulierung)*

In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Seite c als Hypotenuse gilt die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.

Die Variablen a, b und c stehen für die Größe Länge.



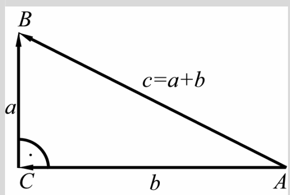
[Abb. 3]

Wir übersetzen den Satz von Pythagoras in eine *vektorielle Formulierung*. Die Variablen a und b stehen **jetzt** für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und beschreiben mit ihrem Betrag, Richtung und Richtungssinn das Dreieck ABC. Dabei gilt: $a \perp b$.

Satz von Pythagoras *(vektorielle Formulierung)*

In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $a \perp b$ gilt die Gleichung: $(\text{Norm}(a))^2 + (\text{Norm}(b))^2 = (\text{Norm}(a+b))^2$.

Dabei liefert die Funktion Norm die Längenmaßzahl (bei gleicher Einheit!) der jeweiligen Vektoren.



[Abb. 4]

Bemerkung: Beide Formulierungen zum Satz von Pythagoras sind gleichwertig. Lediglich in der Wahl der Ausdrucksmittel unterscheiden sich beide Formulierungen.

Lern**auftrag** 10

Testen Sie die nachfolgende CASA. Skizzieren Sie das Dreieck mit den Vektoren f und g und erläutern Sie daran die Bedeutung der CAS-Notation $was \mid fx = \dfrac{-fy\cdot gy}{gx}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{NeuAufg}\\
\begin{bmatrix} fx \\ fy \end{bmatrix} \to f : \begin{bmatrix} gx \\ gy \end{bmatrix} \to g\\
\left(\left(\text{Norm}(f)\right)^2 + \left(\text{Norm}(g)\right)^2 = \left(\text{Norm}(f+g)\right)^2\right) \to was\\
was \mid fx = \dfrac{-fy\cdot gy}{gx}
\end{array}}$$

[Abb. 5]

Wir bereiten den Beweis für den Satz von Pythagoras in seiner vektoriellen Formulierung vor.

Voraussetzung:	Dreieck ABC mit $a \perp b$	V
Behauptung:	$\left(\text{Norm}(a)\right)^2 + \left(\text{Norm}(b)\right)^2 = \left(\text{Norm}(a+b)\right)^2$	B
Beweismittel:	7 Eigenschaften des Skalarprodukts: (skor), (skno), (skko), (skdi), (skho), (sknn), (sknd).	
Beweisidee:	Betrachten wir die CASA im Bild [Abb. 5] etwas genauer, dann können wir aufgrund einer erweiterten CAS-Applikation (siehe [Abb.6]) erkennen: Insbesondere die Eigenschaften der **Längenbildung** (skno) und die der **Orthogonalität** (skor) für skalare Multiplikation sind für unseren Beweis von besonderer Nützlichkeit.	

Wir erweitern die CASA durch die „*wie*-Notation“.

$$\begin{array}{l}
\text{NeuAufg}\\
\begin{bmatrix} fx \\ fy \end{bmatrix} \to f : \begin{bmatrix} gx \\ gy \end{bmatrix} \to g\\
\left(\boxed{\left(\text{Norm}(f)\right)^2} + \boxed{\left(\text{Norm}(g)\right)^2} = \boxed{\left(\text{Norm}(f+g)\right)^2}\right) \to was\\
\qquad \Updownarrow skno \qquad\qquad \Updownarrow skno \qquad\qquad \Updownarrow skno\\
\left(\boxed{\text{SkalarP}(f,f)} + \boxed{\text{SkalarP}(g,g)} = \boxed{\text{SkalarP}(f+g,f+g)}\right) \to wie\\
wie \mid fx = \dfrac{-fy\cdot gy}{gx} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l} \textit{Orthogonalität } (skor):\\ f \perp g \Leftrightarrow \text{SkalarP}(f,g) = 0 \end{array}}
\end{array}$$

[Abb. 6]

Lernauftrag 11

Testen Sie die erweiterte CASA und interpretieren Sie die letzte Ausgabe.

Wir beweisen den Satz von Pythagoras in seiner vektoriellen Formulierung und das mithilfe vektorieller Beweismittel.

Beweisführung:

Beweisfeststellung	**Begründung**
Für das Quadrat der Länge der Hypotenuse können wir schreiben: $\left(\text{Norm}(a+b)\right)^2$.	$c=b+a=a+b$
$\left(\text{Norm}(a+b)\right)^2=\text{SkalarP}(a+b,a+b)$	*(skno)*
$=\text{SkalarP}(a+b,a)+\text{SkalarP}(a+b,b)$	*(skdi)*
$=\text{SkalarP}(a,a)+\text{SkalarP}(b,a)+\text{SkalarP}(a,b)+\text{SkalarP}(b,b)$	*(skdi)*
$=\text{SkalarP}(a,a)+\text{SkalarP}(b,b)$	V, *(skor)* $\text{SkalarP}(b,a)=\text{SkalarP}(a,b)=0$
$=\left(\text{Norm}(a)\right)^2+\left(\text{Norm}(b)\right)^2$	*(skno)*

was zu beweisen war.

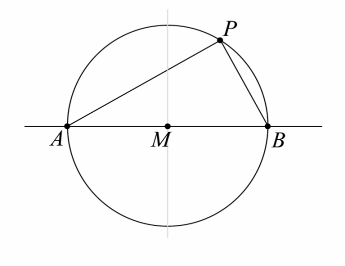
Lern**auftrag** 12
Bilden Sie die Umkehrung zum Satz von Pythagoras und beweisen Sie die Umkehrung mithilfe der Eigenschaften des Skalarprodukts.

Aufgabe 2
Beweisen Sie den Satz von Thales mithilfe der Eigenschaften des Skalarprodukts.

Satz von Thales *(elementargeometrische Formulierung)*

Wenn $\overline{AB}$ der Durchmesser des Kreises k ist und P auf der Kreislinie mit $P \neq A$ und $P \neq B$ liegt, dann ist der Winkel $\sphericalangle BPA$ ein rechter Winkel.

Kurz: Jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises k ist ein rechter Winkel.



[Abb. 7]

Beweis:

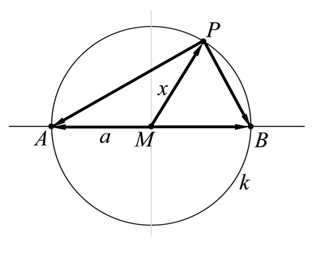
Wir arbeiten mit Vektoren (siehe [Abb. 8]):

$a := \overrightarrow{MA} \in \mathbb{R}^2; \ x := \overrightarrow{MP} \in \mathbb{R}^2$.

Eigenschaften von a und x:

$\boxed{\mathrm{Norm}(a) = \mathrm{Norm}(x) = r}$.

Dabei gibt $r \in \mathbb{R}_+$ die Radiuslänge des Kreises k an.



[Abb. 8]

Voraussetzungen:

V1: $\overline{AB}$ Durchmesser von k

V2: P auf k mit $P \neq A$ und $P \neq B$

Behauptung:

$\mathrm{SkalarP}\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = 0$

Beweisführung:

Beweisfeststellung	**Begründung**
$\mathrm{SkalarP}\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = \mathrm{SkalarP}(a - x, -a - x)$	$\overrightarrow{PA} = a - x$, $\overrightarrow{PB} = -a - x$
$= \mathrm{SkalarP}\left(a - x, (-1)\cdot(a + x)\right)$	Distributivgesetz der Addition reeller Zahlen
$= \dots$	(skho)
$= \dots$	(skdi)
$= \dots$	…

Lern**auftrag** 13

Geben Sie eine vektorielle Formulierung für den Satz von Thales an.

Lern**auftrag** 14

Vervollständigen Sie die angefangene Beweisführung in der Tabelle.

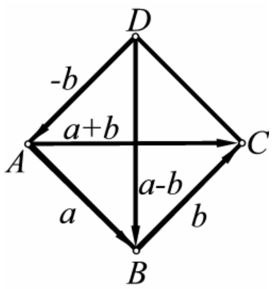
Lern**auftrag** 15

Beweisen Sie:

a) Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

b) Im Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.

Rhombus: Ein Parallelogramm heißt Rhombus, falls die benachbarten Seiten gleich lang sind. Voraussetzung: $\mathrm{Norm}(a) = \mathrm{Norm}(b)$	Rechteck: Ein Parallelogramm heißt Rechteck, falls ein Innenwinkel ein rechter Winkel ist. Voraussetzung: $a \perp b$



[Abb. 9]

Behauptung: $\text{SkalarP}(a+b, a-b) = 0$

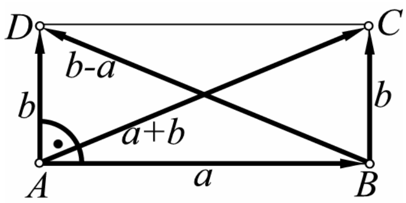
Beweisanfang:

$$\text{Norm}(a) = \text{Norm}(b)$$

$$(\text{Norm}(a))^2 = (\text{Norm}(b))^2$$

$$(\text{Norm}(a))^2 - (\text{Norm}(b))^2 = 0$$

… … … … …



[Abb. 10]

Behauptung: $\text{Norm}(b-a) = \text{Norm}(a+b)$

Beweisanfang:

$a \perp b$

Nach dem Satz von Pythagoras:

Im Dreieck ABC:

$$(\text{Norm}(a))^2 + (\text{Norm}(b))^2 = (\text{Norm}(a+b))^2$$

Im Dreieck ABD: **… … … … …**

⮊ Lern**auftrag** 16

Beweisen Sie:

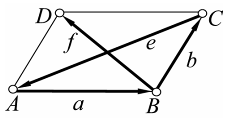
a) den Kathetensatz mit vektoriellen Mitteln

b) den Höhensatz mit vektoriellen Mitteln

⮊ Lern**auftrag** 17

Beweisen Sie: Im Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der doppelten Summe aus den Quadraten zweier anliegender Seiten.

Hinweis: $e^2 + f^2 = \ldots\ldots\ldots = 2 \cdot \left(\ldots^2 + \ldots^2\right)$



[Abb. 11]

⮊ Lern**auftrag** 18

Beweisen Sie: Wenn die beiden Vektoren v und w aus $\mathbb{R}^2$ gleiche Norm haben, dann sind die Vektoren $v+w$ und $v-w$ orthogonal zueinander.