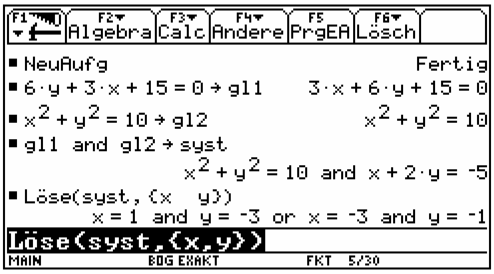
Kreis und Gerade

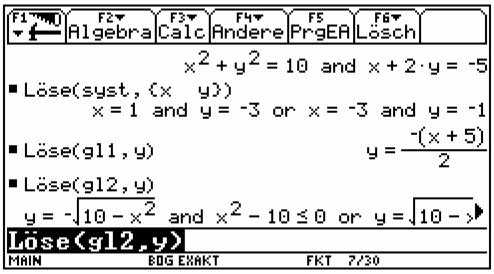
Lern**auftrag** 1

a) Übernehmen Sie die CASA/GNA auf Ihren Rechner.
b) Interpretieren Sie die Ausgaben der Abbildungen [Abb. 5] und [Abb. 6]
c) In welcher Lagebeziehung stehen die zwei Objekte, die durch $gl1$ und $gl2$ beschrieben werden?

HOME/

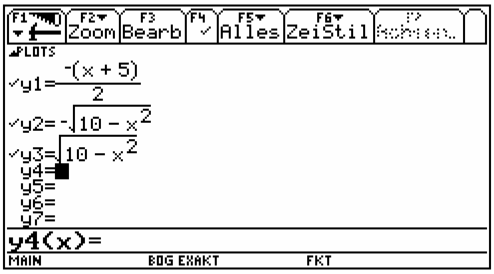


[Abb. 1]



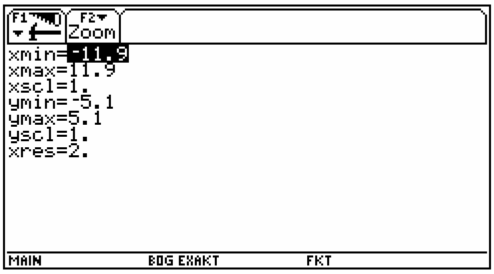
[Abb. 2]

Y=Editor



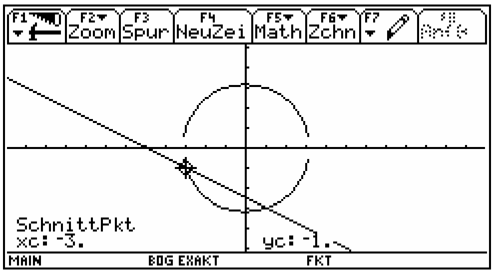
[Abb. 3]

WINDOW/

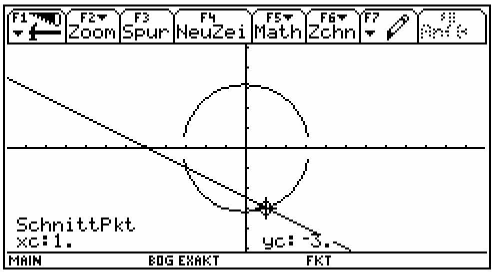


[Abb. 4]

GRAPH/



[Abb. 5]



[Abb. 6]

Lern**auftrag** 2

Was versteht man unter einer Sekante, Tangente und Passante am Kreis? Skizzieren und erläutern Sie.

Lern**auftrag** 3

Gegeben sei der Kreis $k(M,r)$ mit $M(2,3)$ und $r = 4\,\mathrm{cm}$. Geben Sie einen

(1) Punkt P_1 auf $k(M,r)$ und

(2) Punkt P_2 außerhalb von $k(M,r)$ an.

Beschreiben Sie die Zirkel-Lineal-Konstruktionen zur Konstruktion der Tangenten an $k(M,r)$, die durch P_1 bzw. P_2 verlaufen.

Aufgabe 1

Entwerfen Sie eine CASA zur Schnittpunktbestimmung des Kreises $k(M,r)$ mit der Geraden $g(AB)$. Es gilt: $r=5;\ M(1,-2);\ A(-3,\ -15);\ B(-2,-13)$.

Handelt es sich bei $g(AB)$ um eine Sekante, Tangente oder Passante am Kreis $g(AB)$? Begründen Sie.

Bezeichner einführen

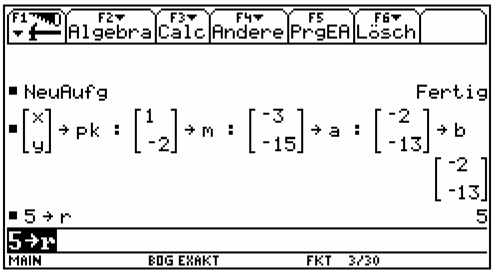
Wir definieren in Spaltenform 4 Ortsvektoren: $p_k,\ m,\ a$ und b.

p_k führt zu einem beliebigen Peripheriepunkt von $k(M,r)$;

m führt zu dem Mittelpunkt M;

a und b führen zu den Punkten A bzw. B. Außerdem legen wir den Radius r fest. Alle diese Variablen werden global belegt.

HOME/



[Abb. 7]

Bezeichner in funktionaler Notation einführen

Mithilfe des HOME/Andere/Definier-Befehls führen wir über eine funktionale Notation die beiden Ausdrücke:

$k(p_k,m,r)$
(*vektorielle Kreisgleichung*);

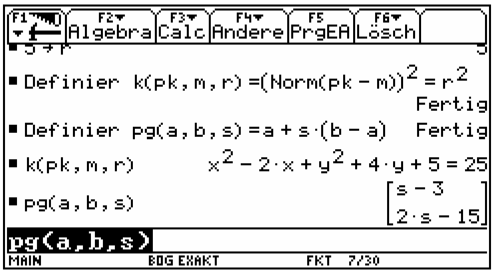
$p_g(a,b,s)$
(*Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt der Geraden* $g(AB)$)

ein.

$$k(p_k,m,r) := \left(\text{Norm}(p_k - m)^2 = r^2\right)$$

$$p_g(a,b,s) := a + s\cdot(b-a) \text{ mit } s\in\mathbb{R}$$

Es erfolgt eine symbolische Auswertung beider Ausdrücke.



[Abb. 8]

Interpretation:

$x^2+y^2-2\cdot x+4\cdot y+5=25$
(*Koordinatenkreisgleichung*);

$$\begin{pmatrix} s-3 \\ 2\cdot s-15 \end{pmatrix}$$
(*Geraden-Ortsvektor mit Parameter* s).

Bedingung für Schnittpunkt bestimmen

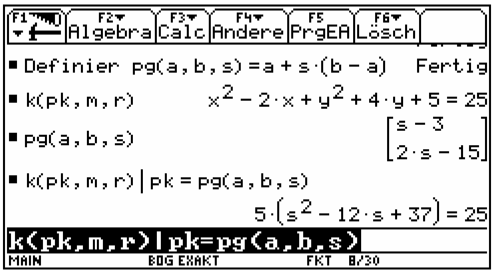
Wir fragen nach Schnittpunkten: Welche Peripheriepunkte des Kreises $k(M,r)$ haben die gleichen Punktkoordinaten x und y wie die Punkte der Geraden $g(AB)$?

Die Schnittpunktbedingung an die dreistellige Aussageform $k(p_k,m,r)$ lautet:

$$p_k = p_g(a,b,s).$$

Wir arbeiten mit dem Mit-Operator „|“.

Nach symbolischer Auswertung entsteht eine einstellige Aussageform in s.



[Abb. 9]

Interpretation: Alle reellen Werte s, die die Gleichung $5\cdot\left(s^2-12\cdot s+37\right)=25$ erfüllen, liefern in gewisser Weise auch die Koordinaten der Schnittpunkte beider Objekte.

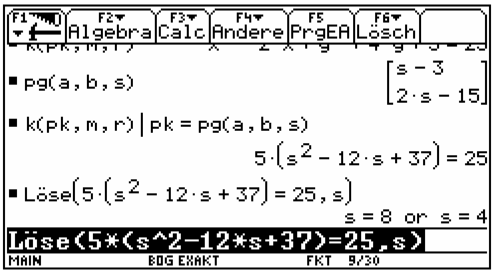
Parameter s berechnen

Wir formen mittels HOME/Algebra/Löse-Befehl die Gleichung

$$5\cdot\left(s^2-12\cdot s+37\right)=25$$

symbolisch nach s um.

Nach symbolischer Auswertung entsteht eine einstellige Aussageform in der Oder-Verbindung.



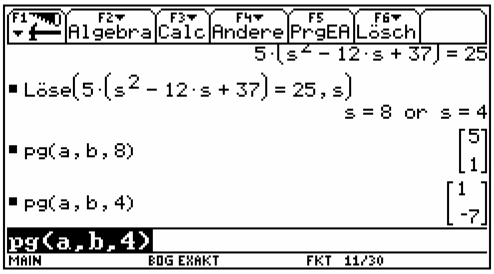
[Abb. 10]

Interpretation: Die Zahlen 4 oder 8 erfüllen die Gleichung in s.

Koordinaten für Schnittpunkte bestimmen

Im Ortsvektor $p_g(a,b,s)$ belegen wir lokal den Parameter s; einmal mit 8 und dann mit 4. Die Ortsvektoren a und b haben bereits feste Werte (siehe [Abb. 7]) und müssen nicht „neu“ belegt werden.

Nach symbolischer Auswertung entstehen Ortsvektoren, die zu den Schnittpunkten S_1 und S_2 führen.



[Abb. 11]

Interpretation: Die Schnittpunkte von Kreis und Gerade sind $S_1(5,1)$ und $S_2(1,-7)$.

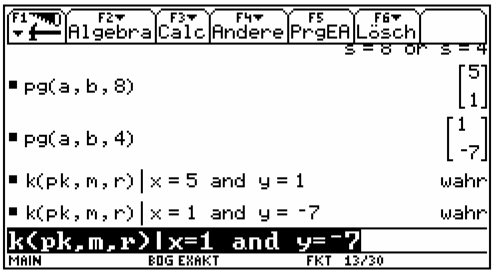
Punktprobe durchführen

Wir erzeugen aus der Aussageform $k\left(p_k, m, r\right)$ zwei Aussagen, indem wir die Variablen x und y lokal belegen:

$k\left(p_k, m, r\right) \mid x = \boxed{5} \text{ and } y = \boxed{1}$,

$k\left(p_k, m, r\right) \mid x = \boxed{1} \text{and } y = \boxed{-7}$

Nach symbolischer Auswertung werden die zugehörigen Wahrheitswerte geliefert.



[Abb. 12]

Interpretation: Die Punkte $S_1\left(5,1\right)$ und $S_2\left(1,-7\right)$ gehören tatsächlich auch zum Kreis $k\left(M, r\right)$.

Antwort

Aufgrund der zwei Schnittpunkte S_1 und S_2 handelt es sich bei der Geraden $g(AB)$ um eine Sekante am Kreis $k\left(M, r\right)$.

Lern**auftrag** 4

Veranschaulichen Sie die Lagebeziehung von $g(AB)$ und $k\left(M, r\right)$ aus der letzten Aufgabe in einer GNA.

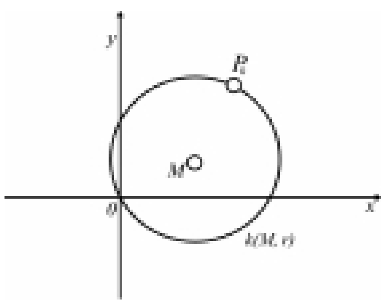
Aufgabe 2

Vom Punkt $P\left(0;12.5\right)$ soll an den Kreis k mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 100$ eine Tangente t gelegt werden. Zeigen Sie, dass die beiden Gleichungen $4 \cdot y - 3 \cdot x = 50$ und $4 \cdot y + 3 \cdot x = 50$ jeweils eine derartige Tangente t beschreiben. Gibt es möglicherweise noch andere Tangenten? Begründen Sie.

Gegeben ist der Kreis $k(M, r)$ mit $r = \sqrt{5}$ und dem Mittelpunkt $M\left(2,1\right)$.

a) Zeigen Sie, dass für den Punkt P_k mit $P_k\left(3,3\right)$ gilt: $P_k \in k\left(M, r\right)$.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente, die den Kreis im Punkt P_k berührt.



[Abb. 13]

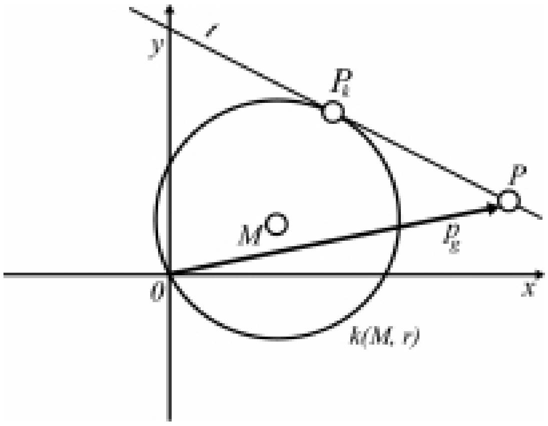
Vorüberlegungen und Bezeichner einführen

Liegt der Punkt $P_k(3,3)$ tatsächlich auf $k(M,r)$?

Wenn ja, dann ist P_k gleichzeitig auch der Berührpunkt der gesuchten Tangente t.

Die Tangente können wir durch einen Ortsvektor für Geradenpunkte erfassen.

Wir legen 3 Ortsvektoren fest:
p_k führt zu dem Punkt $P_k(3,3)$,
m führt zu dem Mittelpunkt $M(2,1)$,
b führt zu dem Punkt $B(b_x,b_y)$.
Außerdem definieren wir r: $\sqrt{5} \rightarrow r$.



[Abb. 14]

Bezeichner in funktionaler Notation einführen

Wir führen weitere Bezeichner ein:

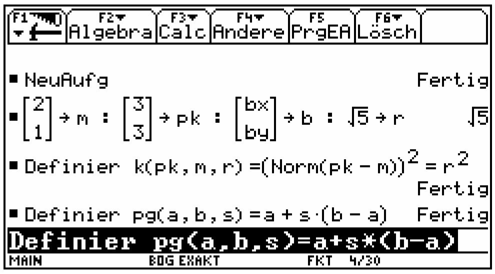
$$k(p_k,m,r) := \left(\left(\text{Norm}(p_k - m) \right)^2 = r^2 \right)$$

(vektorielle Kreisgleichung)

$$p_g(a,b,s) := a + s \cdot (b - a)$$

(Ortsvektor für Geradenpunkt)

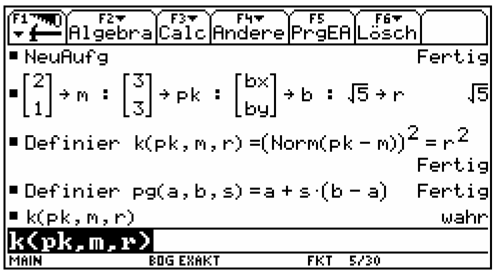
HOME/



[Abb. 15]

Zu a) Punktprobe

Wir testen die vektorielle Kreisgleichung mit der Belegung $k(p_k,m,r)$ aus und überprüfen die Aussage $P_k \in k(M,r)$ auf ihren Wahrheitsgehalt.



[Abb. 16]

Interpretation: Die Aussage $P_k \in k(M,r)$ ist wahr. Der Punkt $P_k(3,3)$ liegt auf der Kreislinie.

Zu b) Bezeichner einführen und Bedingung für Punkt auf Tangente bestimmen

Wir führen für spezielle Vektoren zwei sehr nützliche Bezeichner ein:

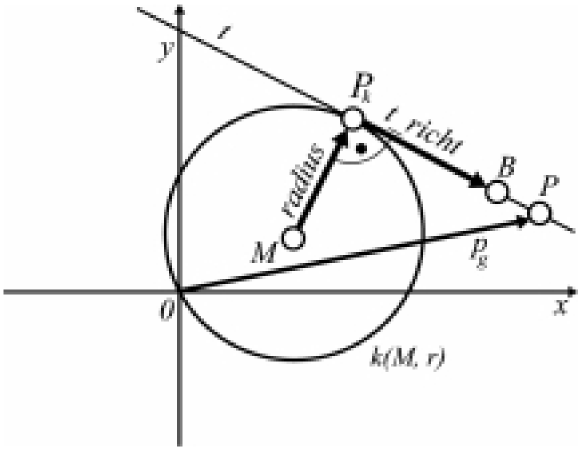
$$radius := \overrightarrow{MP_k} = p_k - m;$$
$$t\_richt := \overrightarrow{P_kB} = b - p_k$$

Wir wissen: Wenn der Ortsvektor $p_g(p_k, b, s)$ einen beliebigen Punkt P der Tangente $t(P_kP)$ „ansteuert", dann müssen die Vektoren $\overrightarrow{MP_k}$ (Radiusvektor) und $\overrightarrow{P_kB}$ (Richtungsvektor der Tangente) orthogonal sein.

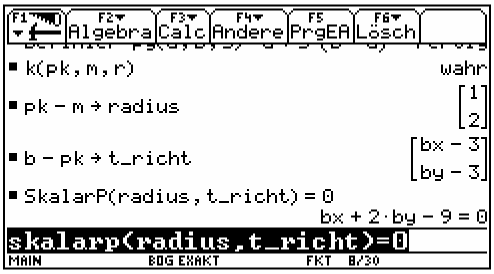
Es gilt der bekannte Zusammenhang:

$$\boxed{\begin{array}{l} radius \perp t\_richt \\ \Leftrightarrow \\ \text{SakalarP}(radius, t\_richt) = 0 \end{array}}$$

Der Richtungsvektor $t\_richt = \overrightarrow{P_kB}$ der Tangente kann somit numerisch bestimmt werden.



[Abb. 17]



[Abb. 18]

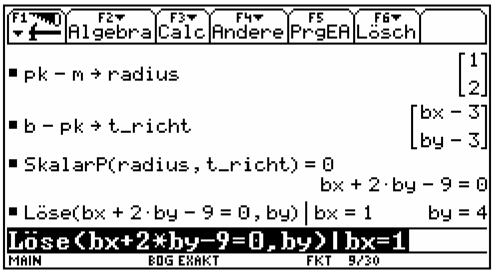
Interpretation: Wir erhalten eine Gleichung in zwei Variablen. Alle Lösungen stellen die Koordinaten für den Punkt $B \in t$ dar.

… Punktkoordinaten bestimmen

Wir bestimmen von dem Punkt B die Koordinaten. Dazu stellen wir die Gleichung

$$b_x + 2 \cdot b_y - 9 = 0$$

o.B.d.A. nach b_y um und setzen mittels Mit-Operator die Bedingung $b_x = 1$.

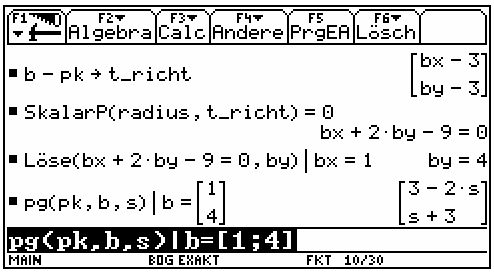


[Abb. 19]

Interpretation: Das Koordinatenpaar $(1, 4)$ ist eine Lösung. Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen.

… Ortsvektor der Tangente bestimmen

Wir kennen von der Tangente t die Punkte $P_k(3,3)$ und $B(1,4)$.
Wir sind somit in der Lage, den Ortsvektor $p_g(p_k,b,s)$ von t zu bestimmen. Wir belegen mittels Mit-Operator lokal den Ortsvektor b. Der Vektor p_k ist bereits belegt.



[Abb. 20]

Nach symbolischer Auswertung erhalten wir einen Vektor mit reellem Parameter.

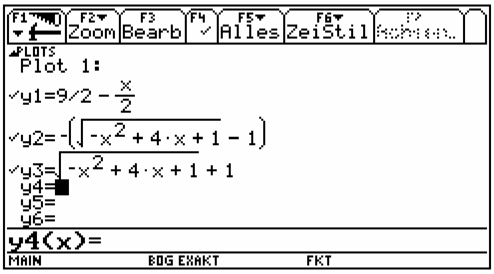
Interpretation: Die Tangente hat den Ortsvektor $\begin{pmatrix} 3-2\cdot s \\ 3+1\cdot s \end{pmatrix}$ mit $s\in\mathbb{R}$.

Lern**auftrag** 5

Veranschaulichen Sie die Lagebeziehung zwischen der Geraden g mit dem Geraden-Ortsvektor $\begin{pmatrix} 3-2\cdot s \\ 3+1\cdot s \end{pmatrix}$ und dem Kreis k mit der Gleichung $\left(\operatorname{Norm}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right)^2=5$ in einer GNA.

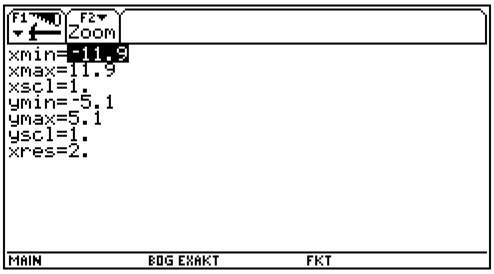
Lösungshinweise:

Y=Editor/



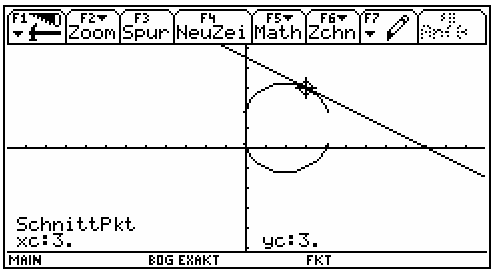
[Abb. 21]

WINDOW/



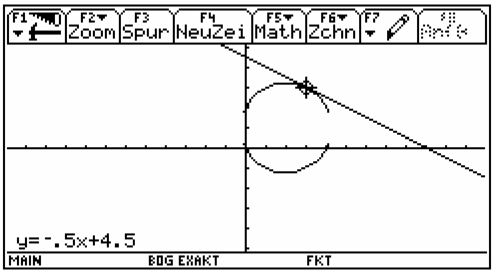
[Abb. 22]

GRAPH/



[Abb. 23]

GRAPH/



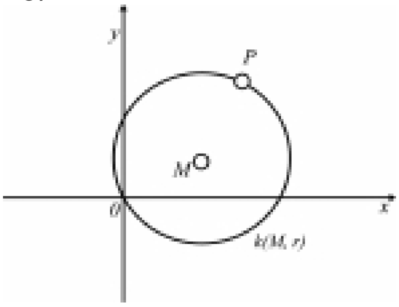
[Abb. 24]

Mit dem Werkzeug GRAPH/Math/5:SchnittPkt werden die Koordinaten des Berührpunktes überprüft.

Mit dem Werkzeug GRAPH/Math/A:Tangente wird die Lage der Geraden überprüft.

Aufgabe 3 (*Herleitung der vektoriellen Tangentengleichung*)

Gegeben ist der Kreis $k(M,r)$ mit dem Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ und dem Punkt $P \in k(M,r)$ mit $P(x_P, y_P)$.
Bestimmen Sie eine vektorielle Gleichung der Tangente, die den Kreis im Punkt P berührt.



[Abb. 25]

Der Punkt $P(x_P, y_P)$ soll ein Berührpunkt sein. Wir bezeichnen zwei Ortsvektoren sowie die vektorielle Kreisgleichung.

m führt zu dem Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$,

p führt zu dem Punkt $P(x_P, y_P)$,

$$k(p,m,r) := \left(\left(\mathrm{Norm}(p-m) \right)^2 = r^2 \right)$$

(*vektorielle Kreisgleichung*)

Außerdem benötigen wir den Radiusvektor und den Tangentenrichtungsvektor:

$$radius := \overrightarrow{MP} = p - m = \begin{pmatrix} x_P - x_m \\ y_P - y_m \end{pmatrix}.$$

Wegen der Forderung

$$\mathrm{SkalarP}(radius, t\_richt) = 0$$

legen wir fest:

$$t\_richt := \begin{pmatrix} y_P - y_m \\ x_m - x_P \end{pmatrix}.$$

(*Bitte Koordinatenwahl begründen!*)

Wir belegen in $p_g(a,n,s)$ die Vektorvariablen a und n lokal mit den Werten von p und t_richt, um den Ortsvektor der Tangente mit reellem Parameter s zu realisieren.

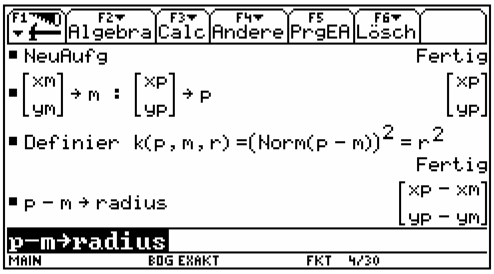
Wir erkennen: Der Ortsvektor der Tangente hängt von vier Koordinaten und einem skalaren Parameter ab.

Wir legen den Tangenten-Ortsvektor fest:

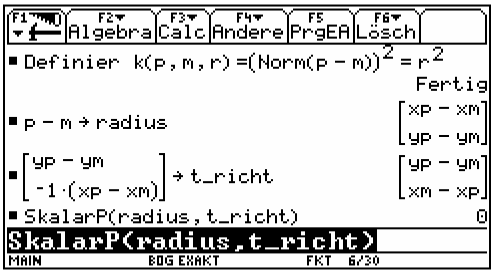
$$\boxed{t(x_P, y_P, x_m, y_m, s) := \begin{pmatrix} (y_P - y_m) \cdot s + x_P \\ (x_m - x_P) \cdot s + y_P \end{pmatrix}}$$

und testen ihn durch lokales Belegen aus.
Die Interpretation überlassen wir dem aktiven Leser.

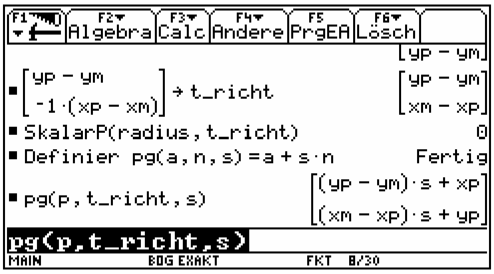
HOME/



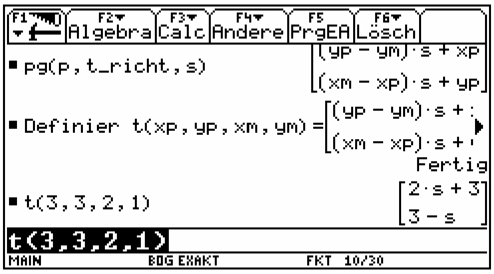
[Abb. 26]



[Abb. 27]



[Abb. 28]



[Abb. 29]

Satz 3 (Kreistangente im Punkt P mit Parameter $s \in \mathbb{R}$)
Die Tangente t, welche einen Kreis $k(M,r)$ mit $M\left(x_m, y_m\right)$ im Punkt $P\left(x_p, y_p\right)$ berührt, hat den Ortsvektor

$$t(x_p, y_p, x_m, y_m, s) := \begin{pmatrix} \left(y_p - y_m\right)\cdot s + x_p \\ \left(x_m - x_p\right)\cdot s + y_p \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Der Punkt $P(8,10)$ liegt auf dem Kreis $k(M,r)$ mit $M\left(-9,-7\right)$. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Tangente t im Punkt P.

Erster Lösungsweg (Eliminierung *der Variablen* s*)*

Fünfstellige Aussageform nach Satz 3

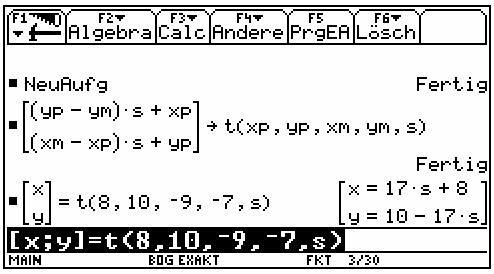
$$\boxed{\begin{pmatrix} \left(y_p - y_m\right)\cdot s + x_p \\ \left(x_m - x_p\right)\cdot s + y_p \end{pmatrix} \to t(x_p, y_p, x_m, y_m, s)}$$

Nach Satz 3 kann der Ortsvektor der Tangente mit $t(x_p, y_p, x_m, y_m, s)$ berechnet werden. Belegt werden in $t(x_p, y_p, x_m, y_m, s)$ die ersten vier Parameter. Wir wählen als Ansatz die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t(8,10,-9,-7,s).$$

Nach symbolischer Auswertung entsteht eine dreistellige Aussageform (kein Vektor!) in x, y und s.

HOME/



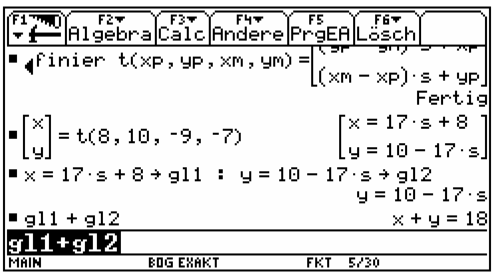
[Abb. 30]

Interpretation: Wir erhalten zwei Gleichungen mit den drei Variablen: x, y und s.

Wir eliminieren aus beiden Gleichungen die Variable s, indem wir getrennt nach den Seiten der Gleichung entsprechende Termglieder addieren.

$$\begin{array}{rcrr} x & = & 17\cdot s & +8 \\ \updownarrow & = & \updownarrow & \updownarrow \\ y & = & -17\cdot s & +10 \\ \hline x+y & = & 0 & +\ 18 \end{array}$$

Nach symbolischer Auswertung entsteht eine zweistellige Aussageform in x und y.



[Abb. 31]

Interpretation: Die Tangente t im Punkt P hat die Koordinatengleichung $x + y = 18$.

Zweiter Lösungsweg (mithilfe des Skalarproduktes)

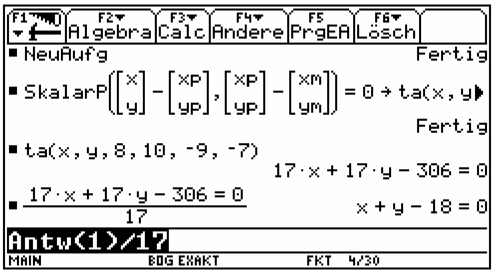
Sechsstellige Aussageform (nach Satz 4)

$$\boxed{\text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}\right) = 0 \rightarrow ta\left(x, y, x_p, y_p, x_m, y_m\right)}$$

Wir bedienen uns einer sechsstellige Aussageform. Belegt werden in $ta\left(x, y, x_p, y_p, x_m, y_m\right)$ die letzen vier Parameter.

Nach symbolischer Auswertung entsteht eine zweistellige Aussageform in x und y.

HOME/



[Abb. 32]

Interpretation: Die Tangente t im Punkt P hat die Koordinatengleichung $x + y - 18 = 0$.

Aufgabe 5

Leiten Sie aus Satz 3 die Gleichung $\text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}\right) = 0$ her.

Wir wissen:

(1) $\text{SkalarP}\left(n, radius\right) = 0$

(2) Tangententerm nach Satz 3:

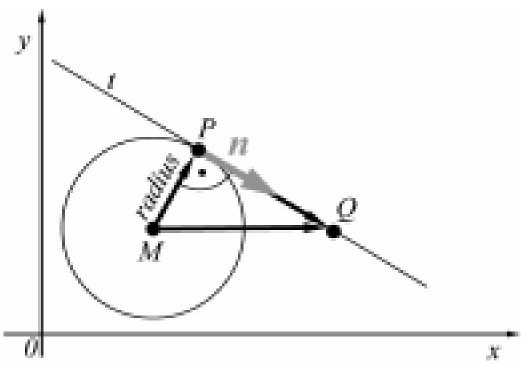
$$t(x_p, y_p, x_m, y_m, s) = \begin{pmatrix} \left(y_p - y_m\right) \cdot s + x_p \\ \left(x_m - x_p\right) \cdot s + y_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} y_p - y_m \\ x_m - x_p \end{pmatrix}$$

$$= p + s \cdot n$$

mit $n := \begin{pmatrix} y_p - y_m \\ x_m - x_p \end{pmatrix}$, dem Normalenvektor und $s \in \mathbb{R}$.

Für den Punkt $Q \in t$ mit $Q \neq P$ setzen wir an: $\boxed{q = n \cdot s + p}$.



[Abb. 33]

$M\left(x_m, y_m\right); \overrightarrow{OM} = m$

$P\left(x_p, y_p\right); \overrightarrow{OP} = p$

$Q\left(x_q, y_q\right); \overrightarrow{OQ} = q$

$radius := \overrightarrow{MP} = p - m$

$radius \perp n$

Wir formen die Gleichung äquivalent um:

$$q = n \cdot s + p$$

$$q - p = n \cdot s$$

Auf beiden Seiten dieser vektoriellen Gleichung werden wir den Vektor *radius* von rechts skalar multiplizieren.

$$q - p = n \cdot s \quad \Big| \operatorname{SkalarP}\left(\square, radius\right)$$

$$\operatorname{SkalarP}\left(\boxed{q-p}, radius\right) = \operatorname{SkalarP}\left(\boxed{n \cdot s}, radius\right)$$

$$\operatorname{SkalarP}(q-p, radius) = s \cdot \operatorname{SkalarP}(n, radius) \quad (Begründen\ Sie!)$$

$$\operatorname{SkalarP}(q-p, radius) = 0 \qquad (Begründen\ Sie!)$$

$$\operatorname{SkalarP}(q-p, p-m) = 0$$

Satz 4 (Kreistangente in P in skalarer Multiplikation)
t sei eine Tangente, welche den Kreis $k(M,r)$ mit $M(x_m, y_m)$ im Punkt $P(x_p, y_p)$ berührt.
Für alle $Q(x,y) \in t$: $\operatorname{SkalarP}(q-p, p-m) = 0$

Aufgabe 6

Gegeben ist ein Kreis $k(M,r)$ mit $M(-9,-7)$ und $r = 17 \cdot \sqrt{2}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes $P(x_p, y_p)$ der Tangente t, wenn t durch den Punkt $Q(12,6)$ verläuft.

Wir beginnen eine neue CASA:

NeuAufg

$$\operatorname{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}\right) = 0 \rightarrow ta\left(x, y, x_p, y_p, x_m, y_m\right)$$

$$\left(\operatorname{Norm}\left(\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}\right)\right)^2 = r^2 \rightarrow kr\left(x_p, y_p, x_m, y_m, r\right)$$

Aus den beiden Aussageformen

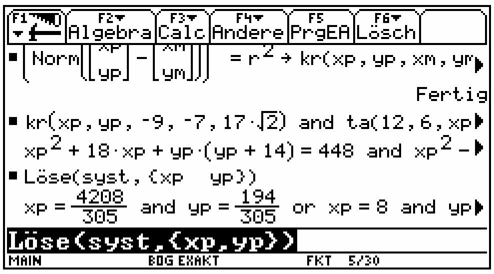
$kr\left(x_p, y_p, -9, -7, 17 \cdot \sqrt{2}\right)$

und

$ta\left(12, 6, x_p, y_p, -9, -7\right)$

gestalten wir ein nichtlineares Gleichungssystem vom Typ (2, 2), namens *syst*, welches wir nach x_p und y_p symbolisch auflösen.

HOME/



[Abb. 34]

Interpretation: Es gibt zwei Berührpunkte P_1 und P_2 mit $P_1\left(\frac{4208}{305}, \frac{194}{305}\right)$; $P_2(8, 10)$.

Lern**auftrag** 6

Veranschaulichen Sie aus der letzten Aufgabe die beiden Berührpunkte P_1 und P_2 mit ihren Tangenten und dem zugehörigen Kreis.

Lern**auftrag** 7

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Kreis $k(M,r)$ mit $M\left(-1,2\right)$ und $r=\sqrt{5}$ durch den Peripheriepunkt $P\left(0,0\right)$.

(Lösung: $x=2\cdot y$)

Lern**auftrag** 8

Ein Kreis mit dem Radius $r=5$ berührt die Gerade $3\cdot x+4\cdot y=9$ im Punkt $P\left(-1,\,3\right)$. Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt des Kreises?

Lern**auftrag** 9

Ein Kreis k mit dem Radius $r=5$ und dem Mittelpunkt $M\left(3,\,1\right)$ sowie die Gerade g mit dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} 3\cdot s+9 \\ -4\cdot s+9 \end{pmatrix}$ und $s\in\mathbb{R}$. Wie lauten die vektoriellen Gleichungen der zur Geraden g parallelen Tangenten an k?

(Lösung: $t_1:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot s+7 \\ -4\cdot s+4 \end{pmatrix};\ t_2:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot s-1 \\ -4\cdot s-2 \end{pmatrix}$)

Lern**auftrag** 10

Wie lang sind die Sehnen des Kreises mit der Gleichung $\left(x-2\right)^2+\left(y+4\right)^2=64$, die auf den Koordinatenachsen liegen?

Lern**auftrag** 11

Strukturieren Sie die Herleitung der vektoriellen Tangentengleichung in Aufgabe 3, indem Sie Überschriften für in sich abgeschlossene Teilabschnitte einfügen.