

Lösen goniometrischer Gleichungen

Eine Gleichung, bei der die Lösungsvariable im Argument von Winkelfunktionen auftritt, heißt *goniometrische Gleichung*.

Aufgabe: Lösen Sie die goniometrischen Gleichungen.

a) $\cos(4x) = 0.5$ b) $\cos(x) = \sin^2(x)$

Zu Aufgabe a)

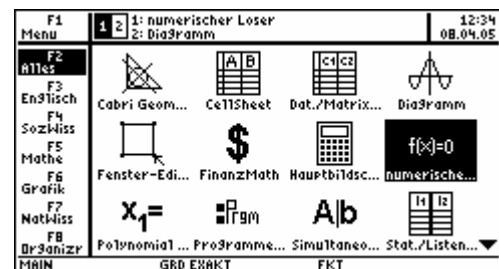
Gradmaß auswählen

Nachdem wir den Startzustand am Rechner hergestellt haben, wählen wir im **[MODE]**-Menü unter der Rubrik *Winkel* mittels Richtungstaste \odot das Gradmaß aus. Wir drücken *zweimal* die **[ENTER]**-Taste.



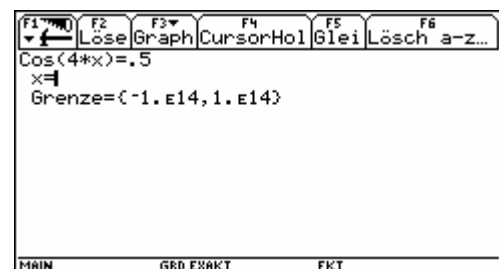
Numerischen Gleichungslöser wählen

Unter Verwendung der **[APPS]**-Taste wählen wir aus dem Generalbildschirm das Menü *numerischer Gleichungslöser* aus.



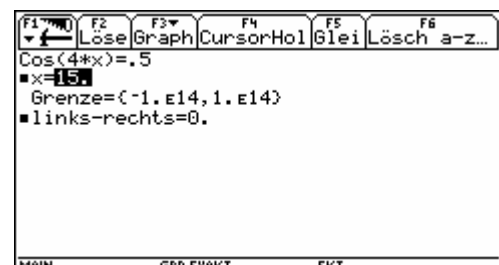
Gleichung eingeben

Wir geben die Gleichung $\cos(4x) = 0.5$ ein und drücken die **[ENTER]**-Taste.



Eine Näherungslösung auf $[0^\circ, 360^\circ]$

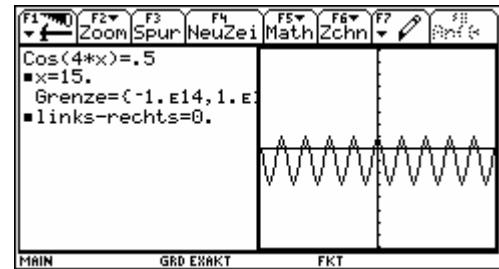
Wir drücken **[F2]** und erhalten so eine Näherungslösung, die Winkelgröße 15° .



Graf zeichnen

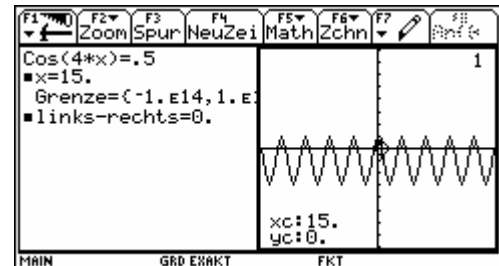
Wir drücken **F3** **ENTER** **F2** **7**.

In einem Nachbarfenster wird der Graf der Funktion f mit $f(x) := \cos(4x) - 0.5$ gezeichnet.



Grafen scannen

Wir drücken **F3** für die Spurfunktion und scannen mittels der Richtungstaste **→** Teile des Grafen ab. Wir ermitteln so einzelne Koordinaten von Punkten auf dem Grafen. Wir lesen bei xc : 15.0 ab, da $yc = 0$.

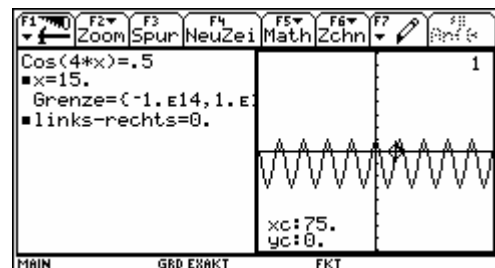


Interpretation (1): Auf dem Grundintervall $[0^\circ, 360^\circ]$ gibt es eine Näherungslösung als Nullstelle von f , die Winkelgröße 15.0° .

Zweite Näherungslösung auf $[0^\circ, 360^\circ]$

Wir drücken **→→→→**.

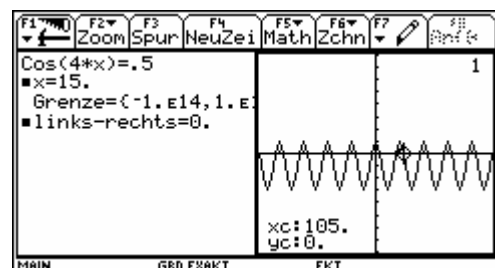
Wir lesen bei xc : 75.0 ab, da $yc = 0$.



Interpretation (2): Auf dem Grundintervall $[0^\circ, 360^\circ]$ gibt es eine zweite Näherungslösung als Nullstelle von f , die Winkelgröße 75.0° .

Dritte numerische Lösung auf $[0^\circ, 360^\circ]$

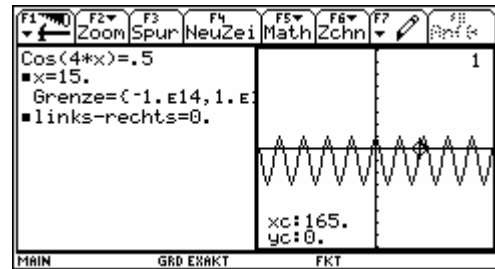
Wir drücken **→→**.



Interpretation (3): Auf dem Grundintervall $[0^\circ, 360^\circ]$ gibt es eine dritte Näherungslösung als Nullstelle von f , die Winkelgröße von 105.0° .

Weitere numerische Lösungen ...

Wir drücken $\odot \odot$... und lesen immer wieder x_c -Wert (Nullstelle) ab, wenn $y_c = 0$.



Interpretation (4): Auf dem Grundintervall $[0^\circ, 360^\circ]$ gibt es eine vierte, fünfte, sechste, siebte und achte Näherungslösung als Nullstelle von f , die Winkelgrößen: 165.0° , 195.0° , 255.0° , 285.0° und 345.0° .

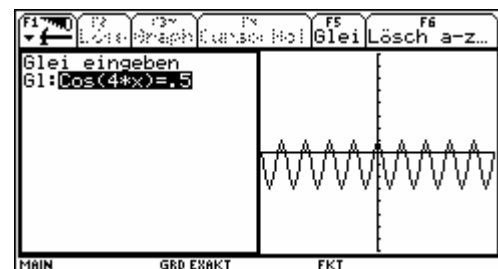
Antwort zu a)

Rechnergestützt haben wir auf dem Grundintervall acht Näherungslösungen der goniometrischen Gleichung $\cos(4x) = 0.5$ ermittelt können. Zum einen: 15.0° , 105.0° , 195.0° , 285.0° und zum anderen: 75.0° , 165.0° , 255.0° , 345.0° . Wir erkennen zwei *arithmetische Folgen* $(x_n)_1$ und $(x_n)_2$ jeweils mit der Differenz von 90.0° (kleinste Periode von f). Alle Näherungslösungen: $x_1(k) = 15.0^\circ + 90.0^\circ \cdot k$ und $x_2(k) = 75.0^\circ + 90.0^\circ \cdot k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Zu Aufgabe b)

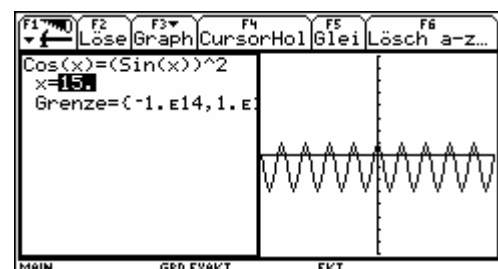
Linke Fenster aktivieren

Wir drücken 2^{nd} $[APPS]$ \odot . Wir wechseln in das linke Fenster und markieren die Gleichung.



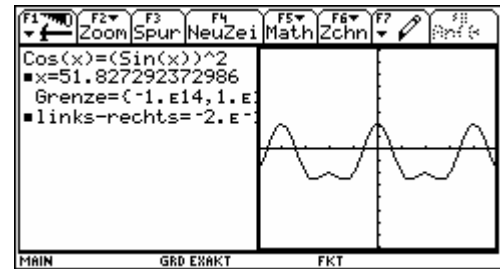
Neue Gleichung eingeben

Wir überschreiben die „alte“ Gleichung mit $\cos(x) = (\sin(x))^2$ und drücken dann $[ENTER]$. Die „alte“ Näherungslösung ist markiert.



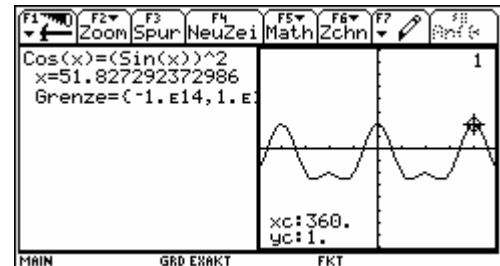
Eine Näherungslösung auf $[0^\circ, 360^\circ]$

Wir drücken $\boxed{F2}\boxed{F3}\boxed{\text{ENTER}}$ und erhalten so eine Näherungslösung, die Winkelgröße $51.82792\dots^\circ$. Im rechten Fenster stellen wir die neue Funktion g mit $g(x) := \cos(x) - (\sin(x))^2$ grafisch dar.



Grafen scannen

Wir drücken $\boxed{F3}$ \odot \odot \odot ... \odot .

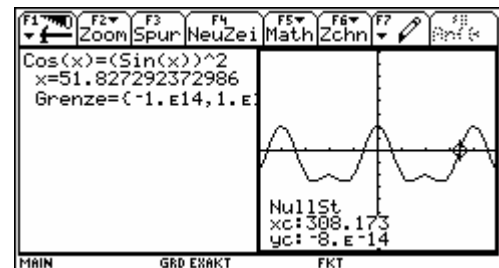


Interpretation (5): Auf dem Grundintervall finden wir beim Scannen des Grafen zwei Stellen, die einen Vorzeichenwechsel aufweisen. Ungefähr bei 45° und bei 300° . In einer Umgebung dieser beiden Winkelgrößen vermuten wir zwei Nullstellen.

Zwei Schnittstellen mit der x -Achse

Wir drücken $\boxed{F5}$ $\boxed{2}$ 45 $\boxed{\text{ENTER}}$ \odot \odot $\boxed{\text{ENTER}}$.

Wir lesen bei x_c ab: 51.8273 , denn $y_c = -8 \cdot 10^{-14} \approx 0$. Wir drücken $\boxed{F5}$ $\boxed{2}$ 300 $\boxed{\text{ENTER}}$ \odot \odot $\boxed{\text{ENTER}}$. Wir lesen bei x_c ab: 308.173 , denn $y_c = -8 \cdot 10^{-14} \approx 0$.

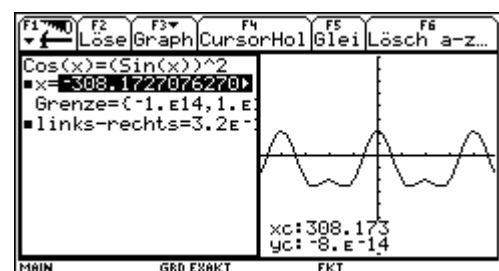


Interpretation (6): Auf dem Grundintervall finden wir die beiden Näherungslösungen 51.8273° und 308.173° .

Näherungslösung außerhalb von $[0^\circ, 360^\circ]$

Wir drücken $\boxed{2nd}\boxed{\text{APPS}}\boxed{2nd}\boxed{\odot}\boxed{-}$ 360 $\boxed{\text{ENTER}}$.

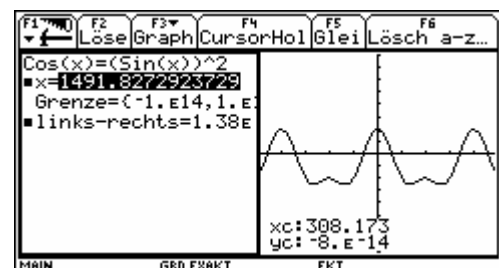
Wir behaupten die Zahl -308.17270762701 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir drücken $\odot\boxed{F2}$ und bestätigen die Behauptung.



Weitere Näherungslösung bestätigen

Wir drücken $\boxed{2nd}\boxed{\odot}\boxed{+}$ 5 $\boxed{\times}$ 360 $\boxed{\text{ENTER}}$.

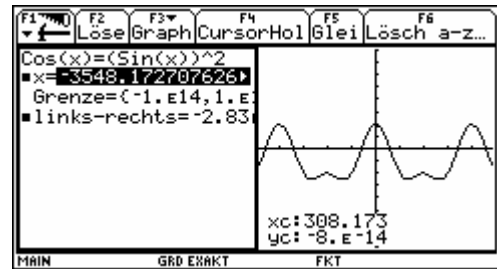
Wir behaupten die Winkelzahl 1491.827292373 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir bestätigen und drücken $\odot\boxed{F2}$.



... und noch eine...

Wir drücken $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\rightarrow} \boxed{-} \boxed{14} \boxed{\times} \boxed{360} \boxed{\text{ENTER}}$.

Wir behaupten die Winkelzahl -3548.172707626 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir bestätigen und drücken $\boxed{\rightarrow} \boxed{\text{F2}}$.



Interpretation (7): Auch außerhalb des Grundintervalls gibt es auf Grund der kleinsten Periode 360° Näherungslösungen.

Antwort zu b)

Auf Grund der kleinsten Periode 360° für g können wir *alle* Näherungslösungen angeben: $x_1(k) = 51.827^\circ + 360^\circ \cdot k$ und $x_2(k) = 308.173^\circ + 360^\circ \cdot k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.