Lösen goniometrischer Gleichungen

Eine Gleichung, bei der die Lösungsvariable im Argument von Winkelfunktionen auftritt, heißt *goniometrische Gleichung*.

Aufgabe: Lösen Sie die goniometrischen Gleichungen.

a) $\cos(4x) = 0.5$ b) $\cos(x) = \sin^2(x)$

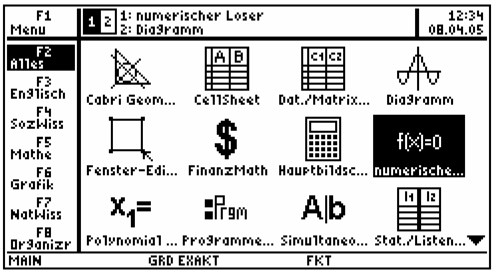
Zu Aufgabe a)

Gradmaß auswählen

Nachdem wir den Startzustand am Rechner hergestellt haben, wählen wir im [MODE]-Menü unter der Rubrik *Winkel* mittels Richtungstaste ▶ das Gradmaß aus. Wir drücken *zweimal* die [ENTER]-Taste.

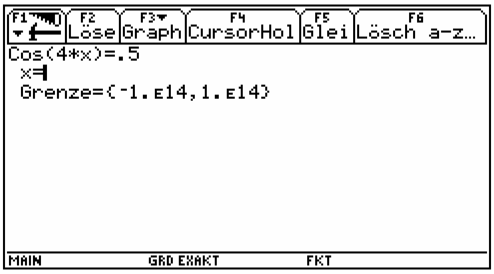
Numerischen Gleichungslöser wählen

Unter Verwendung der [APPS]-Taste wählen wir aus dem Generalbildschirm das Menü *numerischer Gleichungslöser* aus.



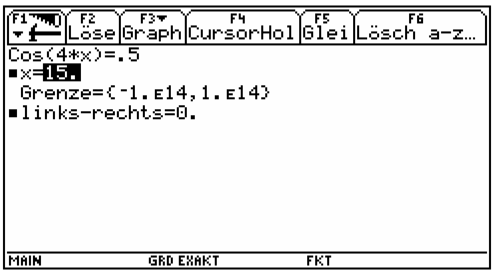
Gleichung eingeben

Wir geben die Gleichung $\cos(4x) = 0.5$ ein und drücken die [ENTER]-Taste.

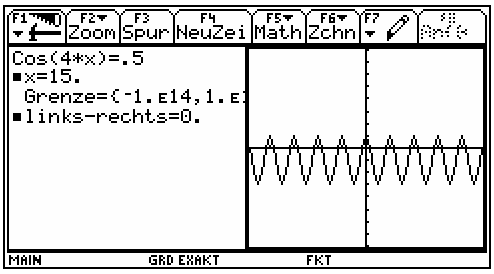


Eine Näherungslösung auf $[0°, 360°]$

Wir drücken [F2] und erhalten so eine Näherungslösung, die Winkelgröße 15.0°.

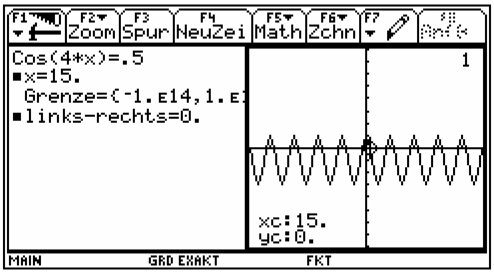


Graf zeichnen



Wir drücken [F3] [ENTER] [F2] [7].
In einem Nachbarfenster wird der Graf der Funktion f mit $f(x) := \cos(4x) - 0.5$ gezeichnet.

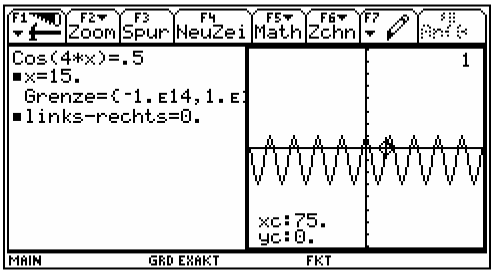
Grafen scannen



Wir drücken [F3] für die Spurfunktion und scannen mittels der Richtungstaste ▸ Teile des Grafen ab. Wir ermitteln so einzelne Koordinaten von Punkten auf dem Grafen. Wir lesen bei xc: 15.0 ab, da $yc = 0$.

Interpretation (1): Auf dem Grundintervall $[0°, 360°]$ gibt es eine Näherungslösung als Nullstelle von f, die Winkelgröße 15.0°.

Zweite Näherungslösung auf $[0°, 360°]$

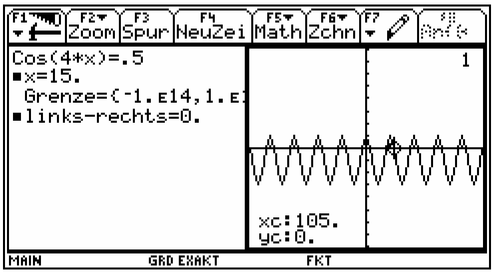


Wir drücken ▸▸▸▸.

Wir lesen bei xc: 75.0 ab, da $yc = 0$.

Interpretation (2): Auf dem Grundintervall $[0°, 360°]$ gibt es eine zweite Näherungslösung als Nullstelle von f, die Winkelgröße 75.0°.

Dritte numerische Lösung auf $[0°, 360°]$

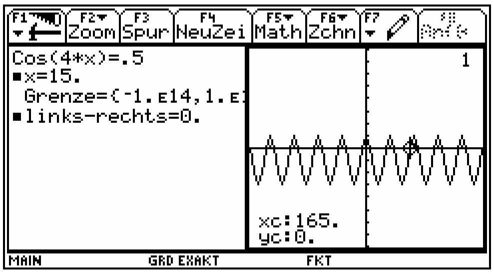


Wir drücken ▸▸.

Interpretation (3): Auf dem Grundintervall $[0°, 360°]$ gibt es eine dritte Näherungslösung als Nullstelle von f, die Winkelgröße von 105.0°.

Weitere numerische Lösungen …

Wir drücken ▶ ▶ … und lesen immer wieder xc-Wert (Nullstelle) ab, wenn $yc = 0$.



Interpretation (4): Auf dem Grundintervall $[0°, 360°]$ gibt es eine vierte, fünfte, sechste, siebte und achte Näherungslösung als Nullstelle von f, die Winkelgrößen: 165.0°, 195.0°, 255.0°, 285.0° und 345.0°.

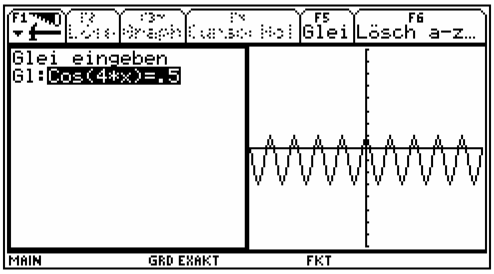
Antwort zu a)

Rechnergestützt haben wir auf dem Grundintervall acht Näherungslösungen der goniometrischen Gleichung $\cos(4x) = 0.5$ ermittelt können. Zum einen: 15.0°, 105.0°, 195.0°, 285.0° und zum anderen: 75.0°, 165.0°, 255.0°, 345.0°. Wir erkennen zwei *arithmetische Folgen* $(x_n)_1$ und $(x_n)_2$ jeweils mit der Differenz von 90.0° (kleinste Periode von f). *Alle* Näherungslösungen: $x_1(k) = 15.0° + 90.0° \cdot k$ und $x_2(k) = 75.0° + 90.0° \cdot k$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

Zu Aufgabe b)

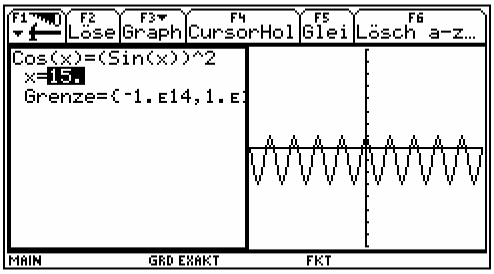
Linke Fenster aktivieren

Wir drücken [2nd] [APPS] ▲. Wir wechseln in das linke Fenster und markieren die Gleichung.



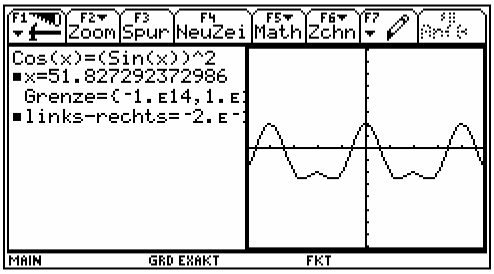
Neue Gleichung eingeben

Wir überschreiben die „alte" Gleichung mit $\cos(x) = (\sin(x))^2$ und drücken dann [ENTER]. Die „alte" Näherungslösung ist markiert.



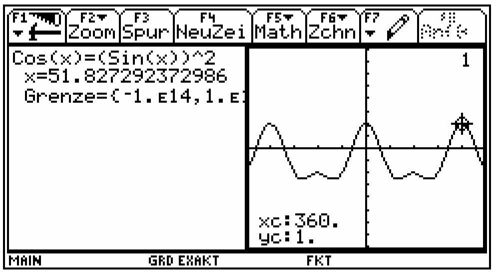
Eine Näherungslösung auf $[0°, 360°]$

Wir drücken `F2` `F3` `ENTER` und erhalten so eine Näherungslösung, die Winkelgröße 51.82792…°. Im rechten Fenster stellen wir die neue Funktion g mit $g(x) := \cos(x) - (\sin(x))^2$ grafisch dar.



Grafen scannen

Wir drücken `F3` ▸ ▸ ▸ … ▸.

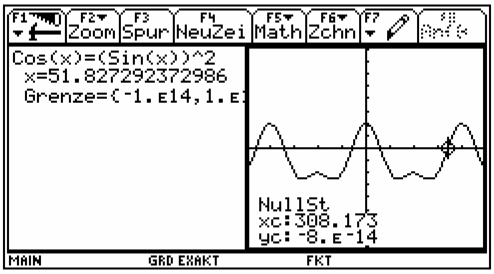


Interpretation (5): Auf dem Grundintervall finden wir beim Scannen des Grafen zwei Stellen, die einen Vorzeichenwechsel aufweisen. Ungefähr bei 45° und bei 300°. In einer Umgebung dieser beiden Winkelgrößen vermuten wir zwei Nullstellen.

Zwei Schnittstellen mit der *x*-Achse

Wir drücken `F5` `2` 45 `ENTER` ▸ ▸ `ENTER`.

Wir lesen bei *xc* ab: 51.8273, denn $yc = -8 \cdot 10^{-14} \approx 0$. Wir drücken `F5` `2` 300 `ENTER` ▸ ▸ `ENTER`. Wir lesen bei *xc* ab: 308.173, denn $yc = -8 \cdot 10^{-14} \approx 0$.

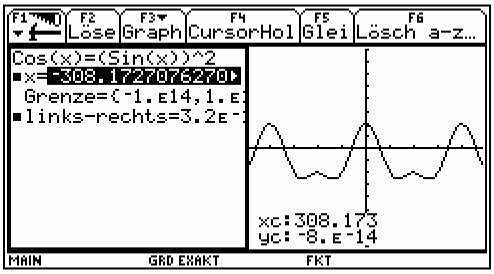


Interpretation (6): Auf dem Grundintervall finden wir die beiden Näherungslösungen 51.8273° und 308.173°.

Näherungslösung außerhalb von $[0°, 360°]$

Wir drücken `2nd` `APPS` `2nd` ▸ `–` 360 `ENTER`.

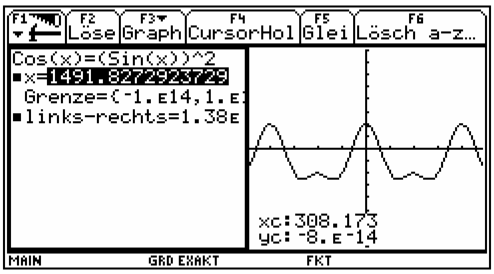
Wir behaupten die Zahl -308.17270762701 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir drücken ▴ `F2` und bestätigen die Behauptung.



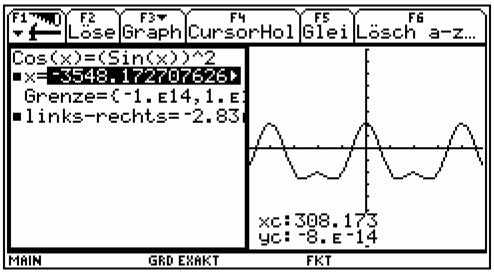
Weitere Näherungslösung bestätigen

Wir drücken `2nd` ▸ `+` 5 `×` 360 `ENTER`.

Wir behaupten die Winkelzahl 1491.827292373 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir bestätigen und drücken ▴ `F2`.



… und noch eine…



Wir drücken [2nd] [▸] [−] 14 [×] 360 [ENTER].

Wir behaupten die Winkelzahl -3548.172707626 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir bestätigen und drücken [⇧] [F2].

Interpretation (7): Auch außerhalb des Grundintervalls gibt es auf Grund der kleinsten Periode 360° Näherungslösungen.

Antwort zu b)

Auf Grund der kleinsten Periode 360° für g können wir *alle* Näherungslösungen angeben: $x_1(k) = 51.827° + 360° \cdot k$ und $x_2(k) = 308.173° + 360° \cdot k$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.