Eine Reihe interessanter Anregungen für eine Weiterentwicklung dieser Lerntechnik unter Einbeziehung moderner Taschenrechner erhielt ich auf dem Kongress für „*Individuelle mathematische Förderung*“ in Prag 2003. In einer der nächsten Ausgaben dieses Magazins werde ich über meine „neuen“ Erfahrungen auf diesem Gebiet berichten.

Für Schule, Studium und zuhause

Lehrbücher des ***Math-College®*** *zeigen Ihnen die praktischen Vorzüge moderner Grafikrechner von Texas Instruments.*

Zwei Bücher, *die Ihnen* ***wert****volle Tipps geben können.*

Das Einmaleins des Voyage™ 200

Das Einmaleins des TI-89 und TI-89 Titanium

www.math-college-shop.de

Lösen goniometrischer Gleichungen

(Eine GNA für den Voyage^{TM} 200)

Eine Gleichung, bei der die Lösungsvariable im Argument von Winkelfunktionen auftritt, heißt *goniometrische Gleichung*.

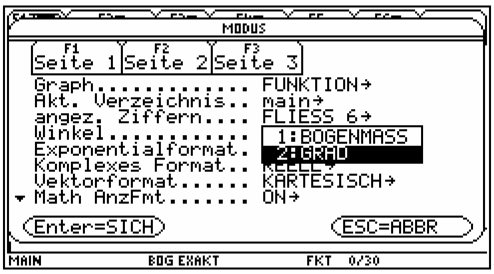
Aufgabe: Lösen Sie die goniometrischen Gleichungen.

a) $\cos(4x) = 0.5$ b) $\cos(x) = \sin^2(x)$

Zu Aufgabe a)

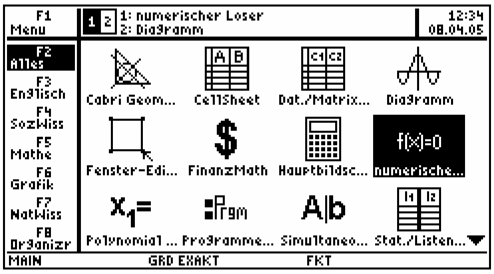
Gradmaß auswählen

Nachdem wir den Startzustand am Rechner hergestellt haben wählen wir im [MODE]-Menü unter der Rubrik *Winkel* mittels Richtungstaste ⨀ das Gradmaß aus. Wir drücken *zweimal* die [ENTER]-Taste.



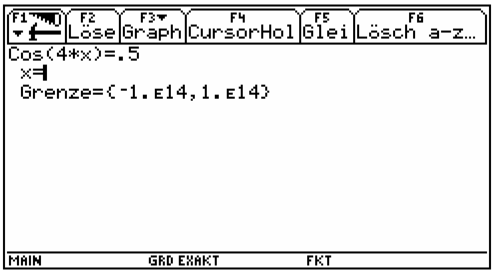
Numerischen Gleichungslöser wählen

Unter Verwendung der [APPS]-Taste wählen wir aus dem Generalbildschirm das Menü *numerischer Gleichungslöser* aus.



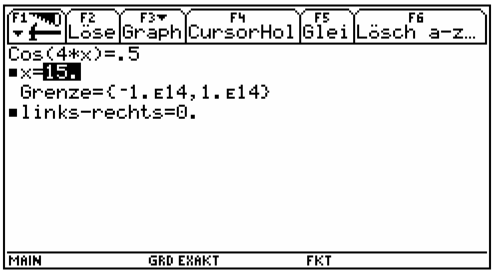
Gleichung eingeben

Wir geben die Gleichung $\cos(4x) = 0.5$ ein und drücken die [ENTER]-Taste.



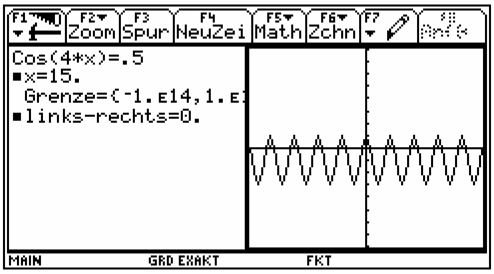
Eine Näherungslösung auf $[0°,360°]$

Wir drücken [F2] und erhalten so eine Näherungslösung, die Winkelgröße 15.0°.



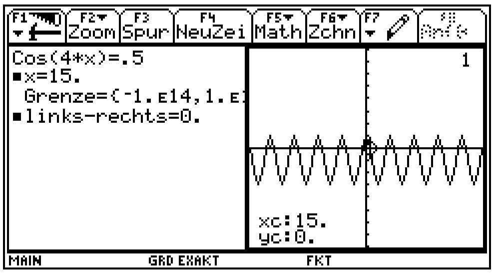
Graf zeichnen

Wir drücken [F3] [ENTER] [F2] [7].
In einem Nachbarfenster wird der Graf der Funktion f mit $f(x) := \cos(4x) - 0.5$ gezeichnet.



Grafen scannen

Wir drücken [F3] für die Spurfunktion und scannen mittels der Richtungstaste ⊙ Teile des Grafen ab. Wir ermitteln so einzelne Koordinaten von Punkten auf dem Grafen. Wir lesen bei xc: 15.0 ab, da $yc = 0$.

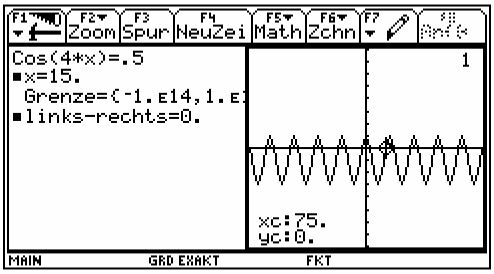


Interpretation (1): Auf dem Grundintervall $[0°,360°]$ gibt es eine Näherungslösung als Nullstelle von f, die Winkelgröße 15.0°.

Zweite Näherungslösung auf $[0°,360°]$

Wir drücken ▷▷▷▷.

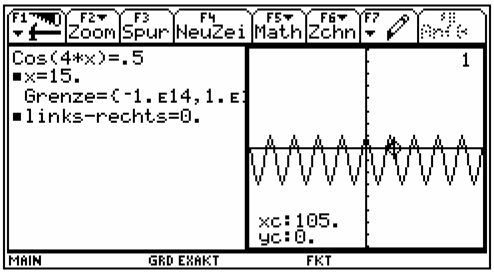
Wir lesen bei xc: 75.0 ab, da $yc = 0$.



Interpretation (2): Auf dem Grundintervall $[0°,360°]$ gibt es eine zweite Näherungslösung als Nullstelle von f, die Winkelgröße 75.0°.

Dritte numerische Lösung auf $[0°,360°]$

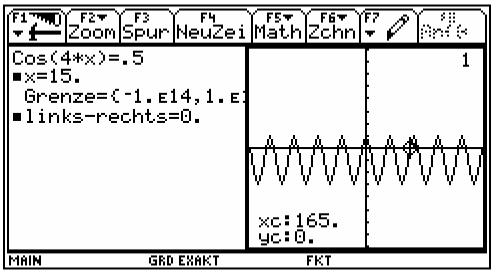
Wir drücken ▷▷.



Interpretation (3): Auf dem Grundintervall $[0°,360°]$ gibt es eine dritte Näherungslösung als Nullstelle von f, die Winkelgröße von 105.0°.

Weitere numerische Lösungen …

Wir drücken ▷▷ … und lesen immer wieder xc-Wert (Nullstelle) ab, wenn $yc = 0$.



Interpretation (4): Auf dem Grundintervall $[0°,360°]$ gibt es eine vierte, fünfte, sechste, siebte und achte Näherungslösung als Nullstelle von f, die Winkelgrößen: 165.0°, 195.0°, 255.0°, 285.0° und 345.0°.

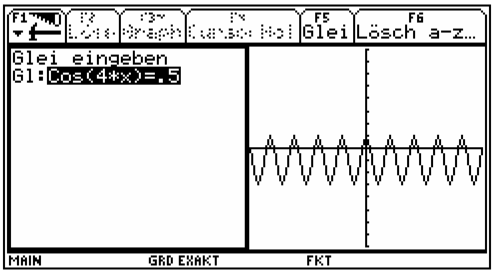
Antwort zu a)

Rechnergestützt haben wir auf dem Grundintervall acht Näherungslösungen der goniometrischen Gleichung $\cos(4x) = 0.5$ ermittelt können. Zum einen: 15.0°, 105.0°, 195.0°, 285.0° und zum anderen: 75.0°, 165.0°, 255.0°, 345.0°. Wir erkennen zwei *arithmetische Folgen* $(x_n)_1$ und $(x_n)_2$ jeweils mit der Differenz von 90.0° (kleinste Periode von f). *Alle* Näherungslösungen: $x_1(k) = 15.0° + 90.0° \cdot k$ und $x_2(k) = 75.0° + 90.0° \cdot k$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

Zu Aufgabe b)

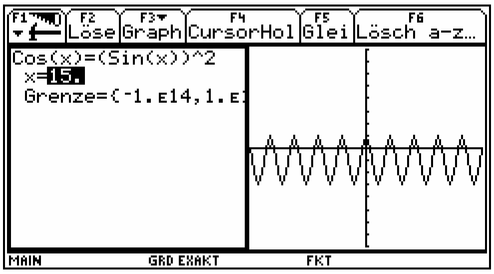
Linke Fenster aktivieren

Wir drücken $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{APPS}}$ ↑. Wir wechseln in das linke Fenster und markieren die Gleichung.



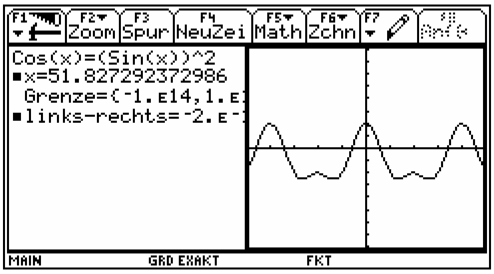
Neue Gleichung eingeben

Wir überschreiben die „alte“ Gleichung mit $\cos(x) = (\sin(x))\,\hat{}\,2$ und drücken dann $\boxed{\text{ENTER}}$. Die „alte“ Näherungslösung ist markiert.



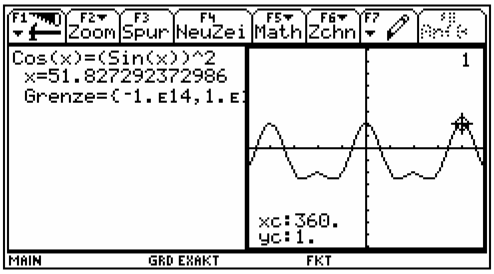
Eine Näherungslösung auf $[0°, 360°]$

Wir drücken $\boxed{\text{F2}}\boxed{\text{F3}}\boxed{\text{ENTER}}$ und erhalten so eine Näherungslösung, die Winkelgröße 51.82792…°. Im rechten Fenster stellen wir die neue Funktion g mit $g(x) := \cos(x) - (\sin(x))^2$ grafisch dar.



Grafen scannen

Wir drücken $\boxed{\text{F3}}$ → → → … →.

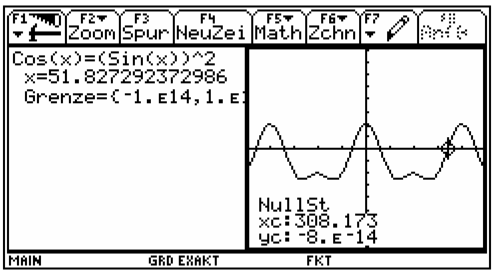


Interpretation (5): Auf dem Grundintervall finden wir beim Scannen des Grafen zwei Stellen, die einen Vorzeichenwechsel aufweisen. Ungefähr bei 45° und bei 300°. In einer Umgebung dieser beiden Winkelgrößen vermuten wir zwei Nullstellen.

Zwei Schnittstellen mit der *x*-Achse

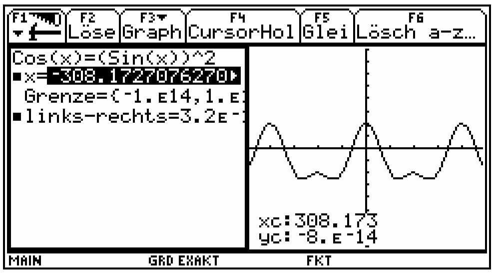
Wir drücken $\boxed{\text{F5}}$ $\boxed{\text{2}}$ 45 $\boxed{\text{ENTER}}$ → → $\boxed{\text{ENTER}}$.

Wir lesen bei xc ab: 51.8273, denn $yc = -8 \cdot 10^{-14} \approx 0$. Wir drücken $\boxed{\text{F5}}$ $\boxed{\text{2}}$ 300 $\boxed{\text{ENTER}}$ → → $\boxed{\text{ENTER}}$. Wir lesen bei xc ab: 308.173, denn $yc = -8 \cdot 10^{-14} \approx 0$.



Interpretation (6): Auf dem Grundintervall finden wir die beiden Näherungslösungen 51.8273° und 308.173°.

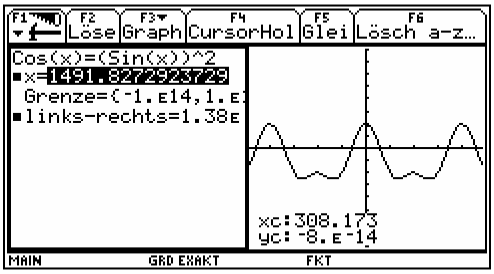
Näherungslösung außerhalb von $[0°, 360°]$



Wir drücken [2nd][APPS][2nd]◯[−] 360 [ENTER].

Wir behaupten die Zahl -308.17270762701 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir drücken ◯[F2] und bestätigen die Behauptung.

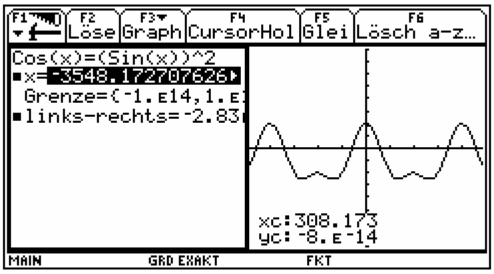
Weitere Näherungslösung bestätigen



Wir drücken [2nd]◯[+] 5 [×] 360 [ENTER].

Wir behaupten die Winkelzahl 1491.827292373 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir bestätigen und drücken ◯[F2].

… und noch eine…



Wir drücken [2nd]◯[−] 14 [×] 360 [ENTER].

Wir behaupten die Winkelzahl -3548.172707626 ist auf Grund der kleinsten Periode 360° ebenfalls eine Näherungslösung. Wir bestätigen und drücken ◯[F2].

Interpretation (7): Auch außerhalb des Grundintervalls gibt es auf Grund der kleinsten Periode 360° Näherungslösungen.

Antwort zu b)

Auf Grund der kleinsten Periode 360° für g können wir *alle* Näherungslösungen angeben: $x_1(k) = 51.827° + 360° \cdot k$ und $x_2(k) = 308.173° + 360° \cdot k$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

Kopiervorlagen

Kopiervorlagen im pdf-Format des Math-College® unterstützen Sie effektiv bei Ihrer Unterrichtsvorbereitung.

Lösen goniometrischer Gleichungen
mit dem Voyage™ 200.

Regeln für die Addition rationaler Zahlen
mit dem TI-30XIIS.

www.math-college-shop.de