1 Prozentrechnung

Die nachfolgenden Übungen und Wiederholungen sind so aufgebaut, dass im Anschluss daran ein leichter Einstieg in die Prozent- und Zinsrechnung ermöglicht wird. Deshalb sollte *jede* Aufgabe und *jede* Übung mit der nötigen Sorgfalt bearbeitet werden.

1.1 Übungen und Wiederholungen

Aufgabe 1

Verwandle in Dezimalbrüche!

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{11}{15}$

Lösung zu a):

Der Nenner von $\frac{5}{4}$ ist 4 und ist ein Teiler der Zehnerpotenz $10^2\,(=100)$, denn es gilt: $4 \cdot 25 = 100$. Wir können daher den Bruch erweitern mit 25:

$$\begin{aligned}\frac{5}{4} &= \frac{5 \cdot 25}{4 \cdot 25} \\ &= \frac{125}{100}\end{aligned}$$

Wir tragen die Zahl $\frac{125}{100}$ als ein Vielfaches von $\frac{1}{100}$ in die Stellenwerttafel ein.

Hunderter	Einer	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
	1	2	5	

Schließlich gilt: $\frac{5}{4} = 1.25$.

Wir erinnern uns: Jeder Bruch ist auch ein **Quotient**.

Wir kontrollieren uns mit dem TR (*Taschenrechner*).
TRAP (***T****aschen***r***echner***a***blauf***p***lan*)**:** $\boxed{\texttt{CLEAR}}$ 5 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$

Eingabe	**Ausgabe**
5/4	
	1.25

Wir vergleichen diese Ausgabe mit unserem Endergebnis.

Wir erinnern uns: Brüche, die sich auf Zehnerbrüche kürzen oder erweitern lassen, können als endliche Dezimalbrüche dargestellt werden.

Lösung zu b):

Der Nenner von $\frac{11}{15}$ ist 15. Es gilt die Primfaktorenzerlegung: $15 = 5 \cdot 3$.

Wir erinnern uns: Brüche, deren Nenner sich nicht allein durch die Primfaktoren 2 und 5 darstellen lassen, können als periodische Dezimalbrüche notiert werden.

Es gilt daher: $\frac{11}{15} = 11 \div 15$.

Mithilfe des Taschenrechners vereinfachen wir den Quotienten in einen Näherungswert.

TRAP: $\boxed{\text{CLEAR}}$ 11 $\boxed{\div}$ 15 $\boxed{=}$

Eingabe	**Ausgabe**
11/15	
	0.733333333

Wir interpretieren die Ausgabe: $11 \div 15 = 0.7\overline{3}$.

Schließlich gilt: $\frac{11}{15} = 0.7\overline{3}$.

Aufgabe 2

Bestimme den Anteil einer Größe!

$\frac{3}{10}$ von $478.00\,€$

Lösung (1): Wir übersetzen in eine Multiplikationsaufgabe: $\frac{3}{10} \cdot 478$.

Mithilfe des Taschenrechners vereinfachen wir das Produkt in einen Näherungswert.

TRAP: $\boxed{\text{CLEAR}}$ 3 $\boxed{\div}$ 10 $\boxed{\times}$ 478 $\boxed{=}$

Eingabe	Ausgabe
$3/10*478$	
	143.4

Wir interpretieren: $\frac{3}{10}$ von $478.00\,€$ sind 143.4 €.

Lösung (2): Wir übersetzen in ein Pfeilschema und behalten die Einheit Euro bei.

$478\,€ \xrightarrow{\div 10} 47.8€ \xrightarrow{\cdot 3} 143.4\,€$

Wir kontrollieren uns mit dem TR.

TRAP: $\boxed{\text{CLEAR}}$ 478 $\boxed{\div}$ 10 $\boxed{=}$

Eingabe	Ausgabe
478	
	47.8

Wir vergleichen diese Ausgabe mit dem Zwischenergebnis nach dem ersten Pfeil: $478\,€ \xrightarrow{\div 10} 47.8€$

TRAP: $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$

Eingabe	Ausgabe
$Ans*3$	
	143.4

Wir vergleichen diese Ausgabe mit dem Endergebnis nach dem zweiten Pfeil: $47.8€ \xrightarrow{\cdot 3} 143.4\,€$

Aufgabe 3

Bestimme das Ganze!

$\frac{1}{4}$ sind $8.40\,\text{m}$.

Lösung: Wenn x das Ganze bedeutet, dann gilt: $\frac{1}{4}$ von x sind $8.40\,\text{m}$. Aus dem Pfeilschema $x \xrightarrow{\div 4} 8.40\,\text{m}$ wollen wir x ermitteln und setzen deshalb Umkehrpfeil und Umkehroperator an.

$x \xleftarrow{\cdot 4} 8.40\,\text{m}$.

Das Umkehrschema übersetzen wir in den
TRAP: $\boxed{\text{CLEAR}}$ 8.4 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{=}$

Eingabe	**Ausgabe**
$8.4*4$	
	33.6

Wir interpretieren die numerische Ausgabe: Das Ganze ist $33.6\,\text{m}$.

Übung 1

Schreibe als Bruch und kürze soweit wie möglich!

a) 0.071 b) 1.804 c) 0.5554

Übung 2

Schreibe als Dezimalbruch!

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{4}{11}$ c) $\frac{25}{40}$ d) $\frac{75}{150}$

Übung 3

Berechne folgende Anteile!

a) $\frac{1}{6}$ von 60 min b) $\frac{8}{12}$ von $12800\,\text{t}$

Übung 4

Berechne das Ganze!

a) $\frac{3}{4}$ sind $45\,\text{min}$ b) $\frac{6}{100}$ sind $54.5\,\text{kg}$

Übung 5

Gib alle Teiler von 100 an!

Übung 6

Eine Mathematikarbeitsgemeinschaft besteht derzeit aus 14 Mitgliedern.

a) Davon sind 8 Jungen. Welchen Anteil bilden die Mädchen?

b) Im nächsten Jahr kommen 3 Mädchen hinzu. Welchen Anteil bilden dann die Jungen?

c) Seit Bestehen dieser AG hat sich die Zahl der Mitglieder bis heute nahezu verdoppelt. Um wie viel Prozent stieg bis heute die Zahl der Mitglieder?

Übung 7

Wie viel Hundertstel (Tausendstel) sind:

a) 80 Kinokarten von 100 Kinokarten?
b) 1 cm von 1 m?
c) 18.00 € von 72.00 €?

Übung 8

Bei einer Umfrage in drei siebten Klassen entschieden sich in der Klasse 7a) von 28 Schülerinnen und Schülern 9, in der 7b) von 25 Schülerinnen und Schülern 7 und in der 7c) von 24 Schülerinnen und Schülern nur 6 für Volleyball als beliebteste Sportart. In welcher Klasse ist die Sportart Volleyball am beliebtesten? Argumentiere!

Übung 9

Erweitere oder kürze, sodass ein Bruch mit dem Nenner 100 entsteht.

a) $\frac{1}{2}$	b) $\frac{3}{3}$	c) $\frac{1}{4}$	d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{1}{5}$	f) $\frac{4}{5}$	g) $\frac{11}{10}$	h) $\frac{60}{6000}$

1.2 Grundbegriffe der Prozentrechnung

Aufgabe 1

Was bedeutet die Zahl 25%?
Bestimme mithilfe des Taschenrechners den gleichwertigen Dezimalbruch und gemeinen Bruch!

Lösung:

TRAP: [CLEAR]

25

[2nd] [(] *(für die Zweitbelegung %)*

[=]

Eingabe	**Ausgabe**
25%	
	0.25

TRAP: [2nd] **[PRB]** *(für die Zweitbelegung* F◀▶D*)*
[=]

Eingabe	**Ausgabe**
Ans▶F◀▶ D	
	1/4

Wir interpretieren: $25\% = 0.25$ und $25\% = \frac{1}{4}$.

Die Tastenfolge [CLEAR] [1] [2nd] [(] erzeugt in der Eingabe die Zahl **1%** und liefert nach Drücken der Taste [=] die numerische Ausgabe **0.01**.

Übung 1

Setze die Aufgabe 1 fort für

a) 50% b) 100% c) 1% d) 75%
e) 2% f) 450% g) 10% h) 33.333%

Aufgabe 2

Was bedeutet die Angabe: Ca. 25% aller Tennisspieler einer Sportgemeinschaft sind Altersrentner.

a) Die Sportgemeinschaft hat 36 Mitglieder.
b) Die Sportgemeinschaft hat 82 Mitglieder.

Lösung zu a)

Schema: $36 \xrightarrow{\cdot 25\%} a$ und a ist gesucht.

TRAP: [CLEAR]
36 [×] 25

[2nd] [(] *(für die Zweitbelegung %)*
[=]

Eingabe	**Ausgabe**
$36 * 25\%$	
	9.

Wir interpretieren: Wenn ca. 25% von 36 Mitglieder einer Sportgemeinschaft Tennisspieler im Rentneralter sind, dann sind es 9 Personen.

Lösung zu b)

Schema: $82 \xrightarrow{\cdot 25\%} b$ und b ist gesucht.

TRAP: ◄ ◄ ◄ ◄ ◄ ◄ ◄
82
[=]

Eingabe	**Ausgabe**
$82 * 25\%$	
	20.5

Wir interpretieren: Wenn ca. 25% von 82 Mitglieder einer Sportgemeinschaft Tennisspieler im Rentneralter sind, dann sind es 21 Personen.

DEFINITION

*Ein Prozent von **G ist ein Hundertstel von G**.*

1 % von G ist $\frac{G}{100}$.

*Dabei nennt man die Größe **G** den **Grundwert**. Die vor dem Zeichen „%“ auftretende Zahl nennt man den jeweiligen **Prozentsatz p**.*

Wir führen einen weiteren in diesem Zusammenhang wichtigen Begriff ein:
Prozentwert *W*.

	Grundwert *G*	**Prozentsatz *p***	**Prozentwert *W*.**	**Ergebnis**
Wie viel sind 1% von 600.00 €?	600.00 €	1	$\frac{1}{100}\cdot 600.00\,€$	6.00 €
Wie viel sind 40% von 600.00 €?	600.00 €	40	$\frac{40}{100}\cdot 600.00\,€$	240.00€
Wie viel sind 100% von 600.00 €?	600.00 €	100	$\frac{100}{100}\cdot 600.00\,€$	600.00€
Wie viel sind 300% von 600.00 €?	600.00 €	300	$\frac{300}{100}\cdot 600.00\,€$	1800.00€
Wie viel sind 80% von A? *A ist eine beliebige Größe.*	A	80	$\frac{80}{100}\cdot A$	$\frac{80\cdot A}{100}$

Aus den Beispielen erkennen wir den allgemeinen Zusammenhang zwischen den drei Begriffen *G*, *p* und *W*.
Einerseits gilt das Schema:

$$G \xrightarrow{\cdot p\%} W\,,$$

anderseits die Gleichung $W = \frac{p\cdot G}{100}$.

Wenn man auf beiden Seiten der Gleichung durch *p* dividiert und dabei voraussetzt, dass $p \neq 0$ gilt, dann erhält man die Grundgleichung in einprägsamer Form.

Herleitung:

$$W = \frac{p \cdot G}{100} \quad | \div p$$ "Auf beiden Seiten der Gleichung dividieren wir durch $p \neq 0$."

$$W \div p = \frac{p \cdot G}{100} \div p$$

$$\frac{W}{p} = \frac{p \cdot G}{100} \cdot \frac{1}{p}$$ "Wir multiplizieren auf der rechten Seite mit dem Kehrwert von p."

$$\frac{W}{p} = \frac{\cancel{p} \cdot G}{100 \cdot \cancel{p}}$$ "Wir kürzen p."

$$\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$$

Grundgleichung der Prozentrechnung: $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$ mit $p \neq 0$.

Wortgleichung zum Einprägen: $\frac{\text{"Prozentwert"}}{\text{"Prozentsatz"}} = \frac{\text{"Grundwert"}}{100}$

Ausgehend von dieser Grundgleichung können *alle* Prozentaufgaben gelöst werden, indem man nach der jeweils gesuchten Größe ***W***, ***p*** oder ***G*** umformt und die gegebenen Werte entsprechend einer Zuordnungstabelle einsetzt.

Prozentwerte *(mit Einheit)*	***W***	***G***
Prozentsätze	***p***	**100**

Dabei ist der Grundwert ***G*** als derjenige Prozentwert ***W*** aufgefasst, der dem Prozentsatz 100 entspricht.

(1) Wenn $p = 100$, dann $W = G$.

(2) In der Zuordnungstabelle müssen Prozentwert ***W*** und Grundwert ***G*** *stets* die *gleiche* Einheit haben.

Übung 2

Bei der Auszählung der letzten Landtagswahlen ergab sich folgende Sitzverteilung im Parlament. Die Partei A kann 44% aller Sitze belegen, die Partei B erhält 28% aller Sitze, die Partei C 23% und für die viertstärkste Partei entfallen die restlichen Sitze. Wie viel Sitze erhält jede dieser vier Parteien, wenn die Gesamtzahl aller Sitze im Parlament noch nicht feststeht? Interpretiere die letzte Zeile! Was fällt dir dabei auf?

a sei die Gesamtzahl aller Sitze im Parlament, $a \in \mathbb{N}^*$

	Partei A	*Partei B*	*Partei C*	*Partei D*
Prozentangaben	44%			
Schema	$a \xrightarrow{\cdot 44\%} \frac{44}{100} \cdot a$			
Term für W	$\frac{11}{25} \cdot a$			
Für $a = 80$				

Übung 3

Zeichne zwei Rechtecke mit den Seitenlängen

a) 1 cm und 5 cm

b) 1 cm und 10 cm!

Schraffiere im ersten Rechteck 10% seiner Fläche, im zweiten Rechteck 5%! Was stellst du beim Vergleich der schraffierten Flächen fest? Begründe deine Feststellung!

Übung 4

Herr Adam und Herr Bernhardt unterhalten sich über die monatlichen Benzinausgaben für ihre PKW.

Herr A. erzählt: „Ich gebe etwa 14% meines monatlichen Einkommens für Benzin aus.“ Herr B. sagt: „Bei mir sind es etwa 16%.“ Welcher der beiden Herren gibt im Monat mehr Geld für Benzin aus?

1.3 Grafisches und numerisches Lösen von Prozentaufgaben

Wir erläutern ein grafisches Lösungsverfahren und betrachten dazu drei Beispielsaufgaben für so genannte Grundaufgaben der Prozentrechnung.

Aufgabe 1

Die gesamte Oberfläche der Erde beträgt ca. $5.10 \cdot 10^6\ km^2$. Davon sind ca. 70% mit Wasser bedeckt. Wie groß ist der mit Wasser bedeckte Teil?

Aufgabe 2

Lars hat eine Armbanduhr gefunden. Er bringt sie zum örtlichen Fundbüro. Nach 14 Tagen meldet sich der Besitzer der Uhr bei ihm und übergibt Lars 40.00 € Finderlohn. Dieser Wert entspricht 8% vom Wert des Fundstücks. Auf welchen Wert wurde die Armbanduhr von den Mitarbeitern des Fundbüros geschätzt?

Aufgabe 3

In der Klasse von Kai kommen täglich 8 von 27 Schülern mit ihrem Fahrrad zur Schule. Wie viel Prozent der Klasse sind sogenannte „Fahrradschüler".

Zu Aufgabe 1

Gegeben:

$$G = 5.10 \cdot 10^6\ km^2$$
$$p = 70$$

Gesucht: W (Prozentwert)

Ansatz: Wir entwickeln die Zuordnungstabelle und achten auf das Mitführen der richtigen Einheit km^2**.**

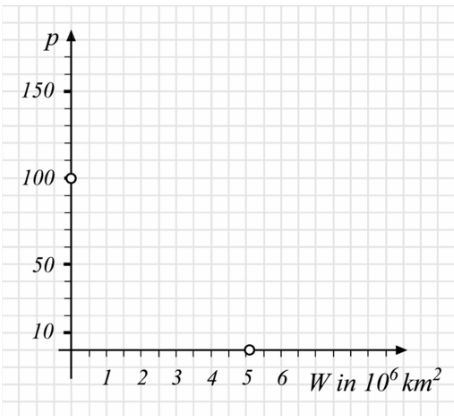
Prozentwerte in km^2	$\boldsymbol{W}$	$5.10 \cdot 10^6$
Prozentsätze	70	**100**

Jeder dieser drei gegebenen Zahlen werden wir als eine bestimmte Koordinate eines Punktes in einem rechtwinkligen Koordinatensystem betrachten. Wir legen fest: $A(0,100)$; $B(5.1,0)$; $C(0,70)$. Die Koordinaten von ***W*** sind gesucht.

W ?	$B(5.1,0)$
$C(0,70)$	$A(0,100)$

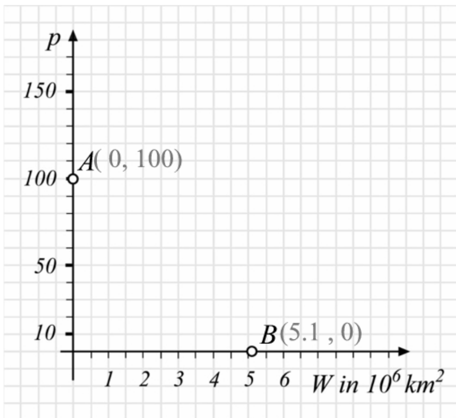
a) Grafischer Lösungsweg:
Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

❶ *p*-*W*-Diagramm



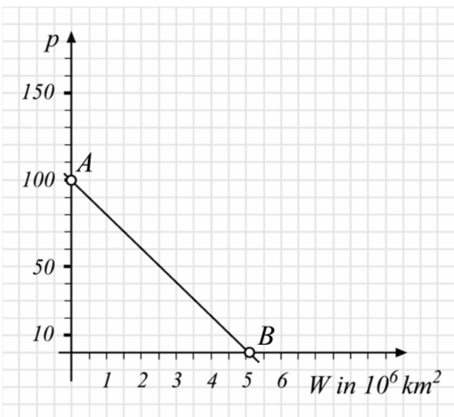
Achsen beschriften, skalieren und Stellen auf beiden Achsen markieren:
$G \triangleq 5.10 \cdot 10^6$ *und* $p \triangleq 100$.

❷



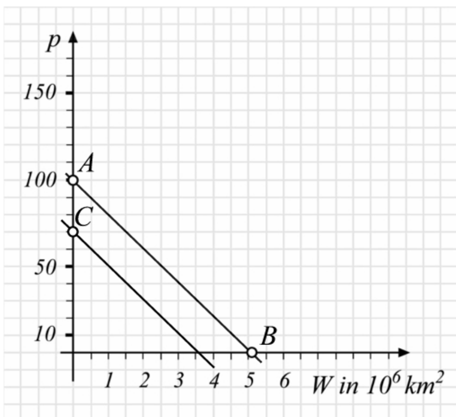
Punkte ***A*** und ***B*** entsprechend der Zuordnung auf den Achsen festlegen.

❸



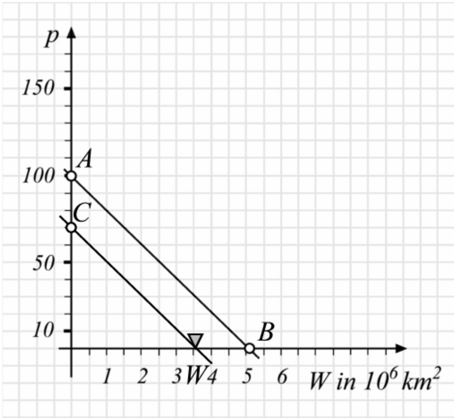
Gerade durch ***A*** und ***B*** zeichnen.

❹



Parallele Gerade durch ***C***(0, 70) zeichnen.

❺



❻

Bei *W Näherungswert* ablesen: $W \approx 3.6 \cdot 10^6\ km^2$.

Interpretation: Der mit Wasser bedeckte Teil der Erde ist ca. 3.6 Millionen Quadratkilometer groß.

Eine Begründung für den grafischen Lösungsweg kann später mithilfe der Strahlensätze oder der Ähnlichkeit von Dreiecken nachgeholt werden.

b) Numerischer Lösungsweg mittels Grundgleichung:

Entsprechend der Zuordnungstabelle entsteht aus der Grundgleichung $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$ die Gleichung:

$\frac{W}{70} = \frac{5.10 \cdot 10^6}{100}$ ohne Einheiten,

wobei es zweckmäßig ist, stets mit der gesuchten Größe zu beginnen.

Wir formen die Gleichung nach *W* äquivalent um und vereinfachen mithilfe des TR den rechten Zahlenterm. Wir runden den ausgegebenen Wert sinnvoll auf zwei zuverlässige Ziffern.

$$\frac{W}{70} = \frac{5.10 \cdot 10^6}{100} \quad | \cdot 70$$

$$\frac{W}{70} \cdot 70 = \frac{5.10 \cdot 10^6}{100} \cdot 70$$

$$W = \frac{5.10 \cdot 10^6}{100} \cdot 70$$

$$W = 3.6 \cdot 10^6$$

TRAP 1: $\boxed{\text{CLEAR}}$
5.1 $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{\wedge}$ 6
$\boxed{\times}$ 70
$\boxed{\div}$ 100
$\boxed{=}$

Interpretation: Der mit Wasser bedeckte Teil der Erde ist ca. 3.6 Millionen Quadratkilometer groß.

Zu Aufgabe 2
Gegeben:

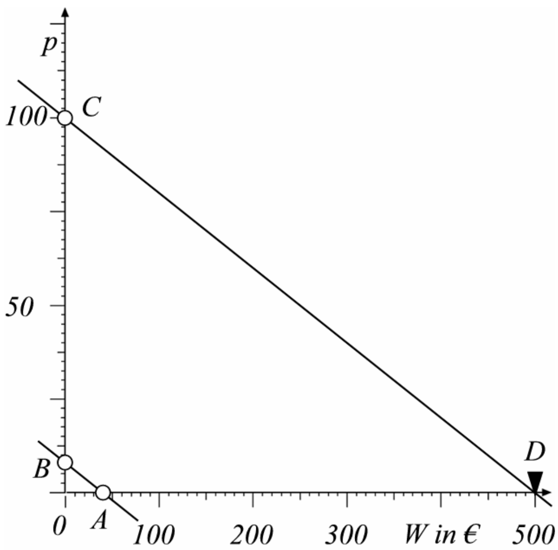
$$W = 40.00\,€$$
$$p = 8$$

Gesucht: G (Prozentwert)

Ansatz: Wir entwickeln die Zuordnungstabelle und achten auf das Mitführen der richtigen Einheit €.

Prozentwerte *in* €	40.00	***G***
Prozentsätze	8	**100**

Grafischer Lösungsweg:



Wir entnehmen aus der Zuordnungstabelle das Zahlenpaar: $(40,8)$. Aus diesem gestalten wir die Punkte ***A*** und ***B*** mit $A(40,0); B(0,8)$. Des weiteren legen wir den Punkt ***C*** mit $C(0,100)$ fest.
Im *p*-*W*-Diagramm zeichnen wir die Geraden $\boldsymbol{g_1}$ und $\boldsymbol{g_2}$ mit $g_1(AB) \parallel g_2(C)$.
Ablesen bei ***D***: $W \approx 500\,€$

Interpretation: Die Armbanduhr wurde von den Mitarbeitern des Fundbüros auf 500 € geschätzt.

Numerischer Lösungsweg

Entsprechend der Zuordnungstabelle entsteht aus der Grundgleichung $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$ die Gleichung:

$\frac{40}{8} = \frac{G}{100}$ ohne Einheiten.

Wir vertauschen beide Seiten der Gleichung, denn es ist für das weitere Umstellen zweckmäßig, die gesuchte Größe links oben in der Gleichung zu haben.

$$\frac{G}{100} = \frac{40}{8}$$

Wir formen die Gleichung nach *G* äquivalent um und vereinfachen den rechten Zahlenterm.

$$\frac{G}{100} = \frac{40}{8} \mid \cdot 100 \quad \text{"Wir multiplizieren auf beiden Seiten mit 100."}$$

$$\frac{G}{\cancel{100}} \cdot \cancel{100} = \frac{40}{8} \cdot 100 \quad \text{"Wir kürzen mit 100."}$$

$$G = \frac{40 \cdot 100}{8}$$

$$G = 500$$

Interpretation: Die Armbanduhr wurde von den Mitarbeitern des Fundbüros auf 500 € geschätzt.

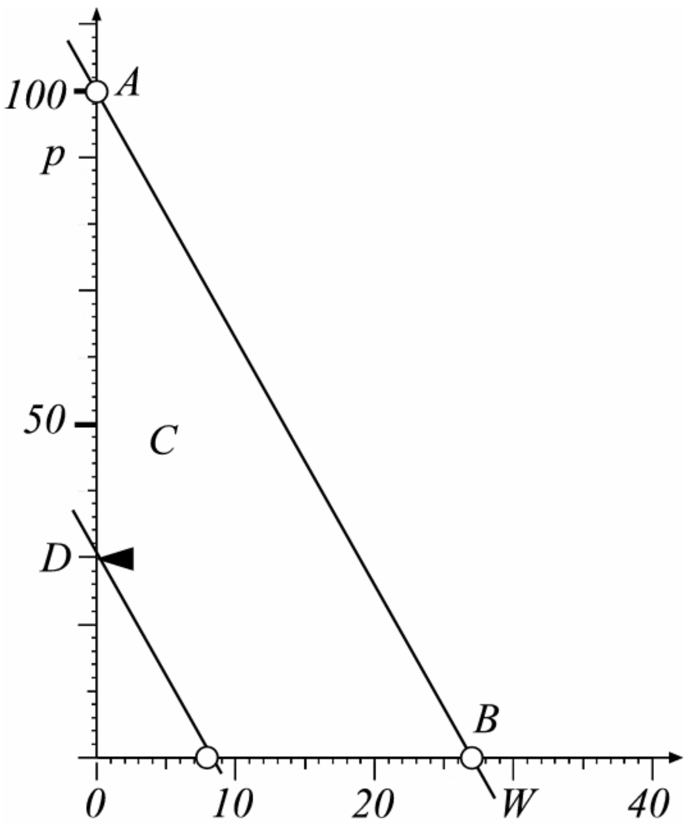
Zu Aufgabe 3

Zuordnungstrabelle:

Prozentwerte *in €*	8	27
Prozentsätze	***p***	**100**

Grafischer Lösungsweg:

(*W* steht für die Anzahl von Schülern)



Ablesen bei ***D***: $p \approx 30$.

Numerischer Lösungsweg:

Gleichung: $\frac{8}{p} = \frac{27}{100}$.

Die gesuchte Größe ***p*** steht unten links. Besser wäre, sie stünde oben rechts. Deshalb bilden wir auf beiden Seiten der Gleichung jeweils den Kehrwert (Zähler und Nenner vertauschen).

$$\frac{p}{8} = \frac{100}{27} \quad | \cdot 8$$

$$\frac{p}{8} \cdot 8 = \frac{100}{27} \cdot 8$$

$$p = 29.6$$

TRAP:
$\boxed{\text{CLEAR}}$

100 $\boxed{\times}$ 8
$\boxed{\div}$ 27 $\boxed{=}$

Interpretation: In der Klasse von Kai sind 30% sogenannte „Fahrradschüler".

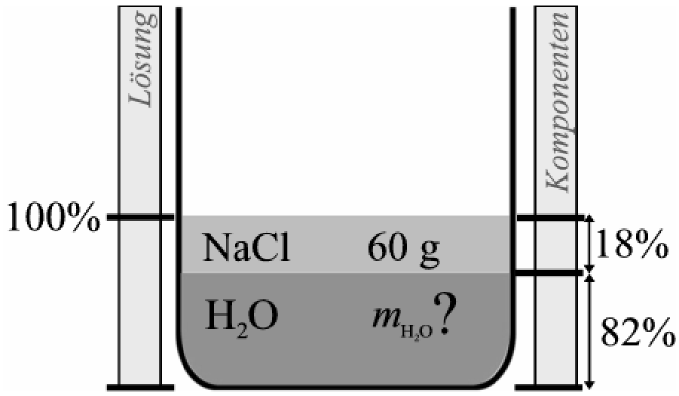
Man muss nicht bei jeder Prozentrechenaufgabe von der Grundgleichung Gebrauch machen, wenn man den numerischen Lösungsweg vorzieht. Dennoch gilt sie in jedem Fall.

Aufgabe 4

Es sollen $60\,\text{g}$ Kochsalz in Wasser gelöst werden, sodass eine 18%-ige Kochsalzlösung entsteht. Berechne die dafür notwendige Masse des Wassers!

Gegeben: $m_{NaCl} = 60\,g$, $p_{NaCl} = 18$
Gesucht: m_{H_2O}
Lösung: Der Grundwert ergibt sich aus der Gesamtmasse, der an der Lösung beteiligten Stoffe. Es gilt: $m_{NaCl} + m_{H_2O} \mathrel{\hat{=}} 100\%$.

Planfigur: Wir veranschaulichen den Sachverhalt an einer Planfigur.



Für die Massen der an der Lösung beteiligten Komponenten entwerfen wir daher die Zuordnungstrabelle:

Prozentwerte *in* g	m_{NaCl}	m_{H_2O}
Prozentsätze	18	100-18

Setzt man die gegebenen Werte ein, erhält man:

Prozentwerte *in* g	60	m_{H_2O}
Prozentsätze	18	82

Wir stellen die Gleichung auf: $\frac{m_{H_2O}}{82} = \frac{60}{18}$ und formen diese nach der gesuchten Größe m_{H_2O} äquivalent um:

$$m_{H_2O} = \frac{60 \cdot 82}{18}.$$

Mithilfe des TR ergibt sich der Näherungswert $m_{H_2O} = 273g$.
Wir führen eine Probe am Text durch.

Wenn $273g + 60g \triangleq 100\%$, dann gilt wegen

Prozentwerte *in* g	60	$273g + 60g$ $(333g)$
Prozentsätze	18	100

in guter Näherung die Beziehung:

$$\frac{60}{18} \approx \frac{333}{100}$$
$$3.333 \approx 3.33$$

Antwortsatz: Für die 18%-ige Kochsalzlösung in der 60g Kochsalz enthalten sein sollen, sind 273g Wasser notwendig.

Übung 1

Übersetze den numerischen Lösungsweg der Aufgabe 4 in einen grafischen Lösungsweg und demonstriere in der Grafik die Gültigkeit der Beziehung „Grundwert $\triangleq$ 100%. Interpretiere das *p*-*W*-Diagramm.

Übung 2

Welche besondere Lage nehmen jene Geraden im *p*-*W*-Diagramm ein, wenn dessen Punktkoordinaten aus ein und derselben Zuordnungstabelle hervorgehen?

Übung 3

Welche Eigenschaften soll die Zelle für den Grundwert *G* in der Zuordnungstabelle haben?

1.4 Der rationelle Umgang mit dem TR

a) Bequeme Prozentsätze und Abschätzungen

Die folgenden Prozentsätze sind die so genannten *bequemen Prozentsätze*, weil man mit ihnen die entsprechenden Prozentsätze bei gegebenen Grundwerten im Kopf relativ schnell vereinfachen kann. Präge sie dir fest.

Verbale Formulierung	Schema	Gleichung
1% von G bedeutet vereinfacht $\frac{G}{100}$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{1}{100}} \frac{G}{100}$	$W = \frac{G}{100}$
2% von G bedeutet vereinfacht $\frac{G}{50}$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{2}{100}} \frac{G}{50}$	$W = \frac{G}{50}$
10% von G bedeutet vereinfacht $\frac{G}{10}$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{10}{100}} \frac{G}{10}$	$W = \frac{G}{10}$
20% von G bedeutet vereinfacht $\frac{G}{5}$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{20}{100}} \frac{G}{5}$	$W = \frac{G}{5}$
25% von G bedeutet vereinfacht $\frac{G}{4}$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{25}{100}} \frac{G}{4}$	$W = \frac{G}{4}$
33,3% von G bedeutet *rund* $\frac{G}{3}$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{33.3}{100}} \frac{G}{3}$	$W \approx \frac{G}{3}$
50% von G bedeutet vereinfacht $\frac{G}{2}$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{50}{100}} \frac{G}{2}$	$W = \frac{G}{2}$
75% von G bedeutet vereinfacht $\frac{3}{4}\cdot G$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{75}{100}} \frac{3}{4}\cdot G$	$W = \frac{3}{4}\cdot G$
100% von G bedeutet vereinfacht G.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{100}{100}} G$	$W = G$
150% von G bedeutet vereinfacht $1.5\cdot G$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{150}{100}} 1.5\cdot G$	$W = 1.5\cdot G$
200% von G bedeutet vereinfacht $2\cdot G$.	$G \xrightarrow{\cdot\frac{200}{100}} 2\cdot G$	$W = 2\cdot G$

Oft tritt man im Alltag Situationen gegenüber, in denen man von einer Größe keinen genauen Wert wissen muss, sondern dass die Bestimmung eines *Näherungswertes* ausreicht, den man im Kopf ausrechnen kann. Aber auch dann, wenn der genaue Wert mittels eines TR berechnet wurde, ist es wichtig, durch eine Abschätzung oder Überschlagsrechnung eventuelle Fehler zu bemerken. In solchen Fällen können die bequemen Prozentsätze zu einem wertvollen geistigen Instrument werden.

Aufgabe 1

Man möchte ohne TR bestimmen, wie viel Prozent sind 139 m^3 von 523 m^3 sind. Man setzt eine Überschlagsrechnung an.

1) Wir übersetzen die verbale Formulierung in das *G-p-W-Schema*:

$$G \xrightarrow{\cdot p\%} W$$

$$523\,\mathrm{m}^3 \xrightarrow{\cdot p\%} 139\,\mathrm{m}^3$$

2) Dann ersetzen wir die gegebenen Werte durch jene Näherungswerte mit denen man im Kopf relativ leicht rechnen kann und erhält das *Überschlagsschema*:

G - p - W-Schema: $523\,\mathrm{m}^3 \xrightarrow{\cdot p\%} 139\,\mathrm{m}^3$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

Überschlagsschema: $500\,\mathrm{m}^3 \xrightarrow{\cdot x} 125\,\mathrm{m}^3$

Dabei wird der gesuchte Prozentsatz p durch einen Näherungswert x ersetzt.

3) Gesucht ist also der *Anteil* x.

4) Wir erkennen sofort: $x = \frac{1}{4}$, denn $500\,\mathrm{m}^3 \cdot \frac{1}{4} = 125\,\mathrm{m}^3$ $\boxed{\text{wahre Aussage}}$.

5) In der Tabelle für bequeme Prozentsätze finden wir dann die entsprechende Zeile:

25% von G bedeutet vereinfacht $\frac{G}{4}$.	$G \xrightarrow{\cdot \frac{25}{100}} \frac{G}{4}$	$W = \frac{G}{4}$

6) Wir antworten: 139 m^3 von 523 m^3 sind *ungefähr* 25%.

Übung 1

Bestimme mithilfe der bequemen Prozentsätze näherungsweise im Kopf die Variablen.

a) 8% von 179 kg sind W_1.

b) 45% von G_1 sind 264 m.

c) 2.3 m von 39.8 m sind $p_1\%$.

d) 86 cm^2 von 98 cm^2 sind $p_2\%$.

e) 148% von 320 t sind W_2.

f) 3% von 0.7 l sind W_3.

g) 0.8% von G_2 sind 4.6 m^3.

h) 18.99 € von 36.95 € sind $p_3\%$.

Für das praktische Rechnen mit Prozenten im Alltag sind Überschlagsrechnungen und Abschätzungen oft von großem Vorteil.

Beispiel: Von einem Darlehen über 80000.00 € wurden bereits 72% zurückgezahlt.

Zuordnungstabelle:

Prozentwerte *in €*	?	80000
Prozentsätze	72	100

Verzichtet man in Vorzug eines „raschen“ Ergebnisses (ohne Verwendung eines TR) auf einen genauen Wert, so kann man formulieren: Es wurden etwas weniger als 60000.00 € zurückgezahlt.

Überlegungen:

(1) $72\% \approx 75\% \wedge 75\% = \frac{3}{4}$ (bequemer Prozentsatz).

(2) $\frac{3}{4}$ von 80000.00 € sind 60000.00 €

(3) 72% von 80000.00 € sind weniger als 75% von 80000.00 €

Die dritte Überlegung führt zu einer Abschätzung und stützt sich dabei auf den *Monotoniesatz der Prozentrechnung*.

MONOTONIE-Satz der Prozentrechnung

Wenn für zwei Prozentsätze p_1 und p_2 gilt: $p_1 < p_2$ und der Grundwert G für beide derselbe ist, dann gilt für die entsprechenden Prozentwerte: $W_1 < W_2$.

Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

Kurz: $G = const$

$p_1 < p_2 \Leftrightarrow W_1 < W_2$ *(Für $\Leftrightarrow$ sprich "Genau-Dann-Wenn")*

Beweis für "$p_1 < p_2 \Rightarrow W_1 < W_2$"

Frage 1: *Wie berechnet man den Prozentwert W?*

	Feststellung	**Begründung**
(1)	$W = \frac{G}{100} \cdot p \quad (G > 0, p > 0)$	Grundgleichung, $G = const$

Frage 2: *Welches Vorzeichen hat die Zahl von $\frac{G}{100}$?*

(2)	$a := \frac{G}{100}$	Einführung einer neuen Variablen
(3)	$a > 0$, $a = const$	$G > 0$, $G = const$

Frage 3: *Wie lautet die Voraussetzung?*

(4)	$p_1 < p_2$	Voraussetzung

Frage 4: *Wie kann man aus der Voraussetzung auf die Behauptung folgern?*

(5)	$a \cdot p_1 < a \cdot p_2$	Monotoniegesetz der Multiplikation rationaler Zahlen
(6)	$W_1 < W_2$	(1) und (2)

w.z.b.w.

Beispiel (1): Wenn $72\% < 75\%$ und $G = 80000$, so $80000 \cdot \frac{72}{100} < 80000 \cdot \frac{75}{100}$.

Beweis "$p_1 < p_2 \Leftarrow W_1 < W_2$"

Frage 1: *Wie berechnet man den Prozentsatz p?*

	Feststellung	**Begründung**
(1)	$p = W \cdot \frac{100}{G} \quad (G > 0, W > 0)$	Grundgleichung, $G = const$

Frage 2: *Welches Vorzeichen hat die Zahl von* $\frac{100}{G}$*?*

(2)	$b := \frac{100}{G}$	Einführung einer neuen Variablen
(3)	$b > 0$, $b = const$	$G > 0$, $G = const$

Frage 3: *Wie lautet die Voraussetzung?*

(4)	$W_1 < W_2$	Voraussetzung

Frage 4: *Wie kann man aus der Voraussetzung auf die Behauptung schließen?*

(5)	$b \cdot W_1 < b \cdot W_2$	Monotoniegesetz der Multiplikation rationaler Zahlen
(6)	$p_1 < p_2$	(1) und (2)

w.z.b.w.

Beispiel (2): Wenn $80000 \cdot \frac{72}{100} < 80000 \cdot \frac{75}{100}$ und $G = 80000$, so $72\% < 75\%$.

Aufgabe 2

Svenja löst die Aufgabe: Wie groß ist der Grundwert G, wenn 89% von G einem Betrag von 196.50 € entsprechen. Svenja gibt als Lösung an: $G = 174.89$ €.
Pia meint, dieser Wert kann gar nicht stimmen und argumentiert in drei Schritten, ohne dabei eine alternative Rechnung aufzubauen:

(1) Einerseits gilt für die Prozentsätze die Ungleichung: $89 < 100$.

(2) Nach dem Monotoniesatz muss mit der Zuordnung von Svenja

Prozentwerte *in* €	196.5	G=174.89
Prozentsätze	89	100

dann für die entsprechenden Prozentwerte gelten: $196.50\,€ < 174.89\,€$, was wiederum eine falsche Aussage darstellt.

(3) Der berechnete Wert von Svenja kann demzufolge nicht richtig sein, denn er muss nach dem Monotoniesatz mit Sicherheit größer als 196.50 € sein.

b) Rationelle Verwendung des Taschenrechners und Überschlagsrechnung

Aufgabe 1

Interpretiere den TRAP in eine mögliche Prozentaufgabe, einschließlich mit zugehöriger Antwort und begründe den TRAP!

TRAP	**Anzeige**	**Interpretation**
$\boxed{\text{CLEAR}}$ 833 $\boxed{\times}$ 27 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{=}$	833∗27% 224.91	Wie viel sind 27% von 833.00 €?

Überschlagsrechnung: 25% von 800.00 € sind 200.00 €, denn $800 \cdot \frac{1}{4} = 200$.

Vergleich: $200.00 \approx 225.00$

Antwort: 27% von 833.00 € sind 224.91 €.

Begründung für den TRAP: Löst man die Grundgleichung nach *W* auf, so gilt:
$W = \frac{G}{100} \cdot p$.

Wegen

2290 Tc(p)Tj0 3

$\overline{}\ 100 \qquad \overline{}\ 100$ | Es gilt für alle rationale Zahlen: —— − (0).

entspricht der TRAP: $\boxed{\text{CLEAR}}$ 833 $\boxed{\times}$ 27 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{=}$ dem numerischen Wert von $W = \frac{833}{100} \cdot 27$, wenn $G = 833, p = 27$.

Aufgabe 2

Löse unter Verwendung der %-Taste und begründe deinen TRAP! Beginne mit einer Überschlagsrechnung!

a) Berechne 2.25% von 615!
b) Wie viel Prozent sind 56 von 290?
c) 36% von ***G*** sind 15. Wie groß ist der Grundwert ***G***?

Zu a)

Überschlagsrechnung unter Verwendung bequemer Prozentsätze: 2% von 600 sind 12, denn $600 \cdot \frac{1}{50} = 12$.

TRAP	**Anzeige**	**Interpretation**
$\boxed{\text{CLEAR}}$ 615 $\boxed{\times}$ 2.25 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{=}$	615∗2.25% 13.8375	2.25% von 615 sind 13.8.

Vergleich: $12 \approx 13.8$

Begründung für den TRAP: Löst man die Grundgleichung nach *W* auf, so gilt: $W = \frac{G}{100} \cdot p$.

Wegen

$$\frac{G}{100} \cdot p = \frac{G \cdot p}{100}$$

$$= G \cdot \frac{p}{100}$$

$$= G \cdot p\%$$

$$= 615 \cdot 2.25\%$$

, wenn $G = 615, p = 2.25$.

Zu b)
Überschlagsrechnung unter Verwendung bequemer Prozentsätze: 60 von 300 sind 20%, denn $\frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 20\%$.

TRAP	**Anzeige**	**Interpretation**
$\boxed{\text{CLEAR}}$ 56 $\boxed{\div}$ 290 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{=}$	$56/290\%$ 19.31034483	56 von 290 sind 19%.

Vergleich: $20 \approx 19$

Begründung für den TRAP: Löst man die Grundgleichung nach *p* auf, so gilt: $p = \frac{W \cdot 100}{G}$.
Wegen

$$p = \frac{W \cdot 100}{G}$$

$$= W \cdot \frac{100}{G}$$

$$= W \div \frac{G}{100} \quad |\text{"Bruchzahlen in Form gemeiner Brüche werden dividiert, indem ...}$$

$$\text{Ergänze die Regel und vergleiche dann mit der vorherigen Zeile."}$$

$$= \frac{W}{G\%} \qquad | \ \frac{G}{100} = G\%$$

$$= \frac{56}{290\%}$$

, wenn $G = 290, W = 56$.

Zu c)
Überschlagsrechnung unter Verwendung bequemer Prozentsätze: 33% von ***G*** sind 15. Also rund $\frac{1}{3}$ von ***G*** sind 15. Dann ist $G = 15 \cdot 3 = 45$.

TRAP	Anzeige	Interpretation
CLEAR 15 ÷ 36 2nd (=	15/36% 41.66666667	15 von ***G*** sind 36%. ***G*** ist 42.

Vergleich: $45 \approx 42$.

Begründung für den TRAP: Löst man die Grundgleichung nach ***G*** auf, so gilt: $G = \frac{W \cdot 100}{p}$.

Wegen

$$\begin{aligned} G &= \frac{W \cdot 100}{p} \\ &= W \cdot \frac{100}{p} \\ &= W \div \frac{p}{100} \\ &= \frac{W}{p\%} \\ &= \frac{15}{36\%} \end{aligned}$$

, wenn $W = 15, p = 36$.

Zusammenfassung:

Gesucht	***W***	***p***	***G***
Term	$\frac{G \cdot p}{100}$ oder $G \cdot p\%$	$\frac{W \cdot 100}{G}$ oder $\frac{W}{G\%}$	$\frac{W \cdot 100}{p}$ oder $\frac{W}{p\%}$
TRAP	CLEAR ***G*** × ***p*** 2nd (=	CLEAR ***W*** ÷ ***G*** 2nd (=	CLEAR ***W*** ÷ ***p*** 2nd (=

Beachte dabei stets:

- *alle TR-Ausgaben sind beim Interpretieren der Ergebnisse sinnvoll zu runden;*
- *den richtigen Umgang mit den Größeneinheiten;*
- *Überschlagsrechnungen sind sinnvolle Kontrollen für die Ergebnisse.*

Übung 2

Interpretiere den TRAP: 131 [÷] 495 [2nd] [(] [=] in eine Prozentaufgabe! Löse deine Prozentaufgabe! Kann mit dem gleichen TRAP auch eine andere Größe aus der Grundgleichung bestimmt werden? Wenn ja, dann gib eine zweite Interpretation an.

Übung 3

Begründe mithilfe der Grundgleichung die Aussage: *„18% von 10g sind genau soviel wie 10% von 18g.“!*

Übung 4

Vervollständige die Tabelle!

Gesucht	Gegeben	TRAP	Interpretation
W	$p = 25\%$ $G = 400\,\text{mm}$	[CLEAR] 400	
p	$W = 80\,\text{g}$ $G = 90\,\text{g}$	[CLEAR] 80	
G	$p = 85\%$ $W = 0.5\,\text{m}$	[CLEAR]	

1.5 Sieben Anwendungsaufgaben

Es werden sieben Aufgaben zur Prozentrechnung vorgestellt und ausführlich gelöst. Jede Lösung beginnt mit einer Zuordnung für Prozentwerte. Damit wird das Aufstellen geeigneter Gleichungen unmittelbar vorbereitet. Die Überschlagsrechnungen dienen als Kontrollhilfen und sichern „grob“ die Richtigkeit der numerischen Ergebnisse ab.

Aufgabe 1

In Apotheken kann man getrocknete Kamillenblüten in Päckchen zu je 30 g kaufen, die als Heiltee bei Erkältung der oberen Atemwege nützlich sein können. Sammelt man selbst frische Kamillenblüten und trocknet sie anschließend, so kann man feststellen, dass ca. 86% ihrer ursprünglichen Masse beim Trocknen verloren gehen. Wie viel an frischer Kamillenblüte sollte man sammeln, um 10 Päckchen getrockneter Kamillenblüte zu je 30 g zu erhalten?

Aufgabe 2

Vergleiche die Alkoholmengen von 1 Glas Wein, 1 Glas Bier und 1 Glas Wodka! Ein Weinglas enthält 100 ml, der Alkoholgehalt des Weins sei 12%. Ein Bierglas enthält 250 ml, der Alkoholgehalt des Bieres sei 4%. Ein Schnapsglas enthält 20 ml, der Alkoholgehalt von Wodka beträgt 40%.

Aufgabe 3

Wie viel Gramm reines Gold enthält ein 333er Goldring, der 6.00 g schwer ist? Die Angabe 333er Gold verspricht dem Kunden, dass der reine Goldgehalt des Ringes 333 ‰ beträgt. Das Zeichen **‰** steht für *Promille*.

1 ‰ = 1/1000

Aufgabe 4

Messing ist eine Legierung aus verschiedenen Metallen und besteht im Wesentlichen aus Kupfer und Zink sowie einigen speziellen Zusätzen, zum Beispiel Blei. Wie viel Kupfer und wie viel Zink werden für 5 t Messing benötigt, wenn die Legierung 21% Zink und 75% Kupfer enthalten soll?

Aufgabe 5

Bei einer Radarmessung wird die Geschwindigkeit mit einem relativen Fehler von 5% gemessen. In Auto wird „geblitzt“ mit 95 km/h. Wie schnell ist das Auto

a) mindestens gefahren,
b) höchstens gefahren?

Aufgabe 6

Ein Fernsehtechniker führt bei Familie Klemme eine Reparatur durch. Für die Arbeitsleistung, Materialaufwand und Fahrtkosten berechnet der Techniker insgesamt 164.90 €. Hinzu kommen 16% Mehrwertsteuer. Wie viel muss Familie Klemme bezahlen?

Aufgabe 7

An der diesjährigen Mathematikolympiade der Goetheschule nahmen von der Klasse 6a 15% aller Schüler teil. Von der 6b waren es nur 8%. Ist die Aussage:
Von beiden sechsten Klassen nahmen insgesamt 23% aller Schüler an der Mathematikolympiade teil.
Richtig oder falsch? Begründe!

Zu Aufgabe 1

Gesucht: m_{frK} … *Masse frischer Kamillenblüte*

Gegeben: $m_{trK} = 10 \cdot 30g$ … *Masse getrockneter Kamillenblüte*
$p = 86$ … *Anteil an verloren gegangener Masse*

Zuordnung:

Prozentwerte *in* g	300	m_{frK}
Prozentsätze	100-86 (=14)	100

Überschlag: $m_{frK} \approx \frac{300 \cdot 100}{10} g = 3kg$

Lösung:

TRAP	CLEAR 300 ÷ 14 2nd (=
Anzeige	2142.857143

Vergleich: $3\,kg \approx 2.2\,kg$

Antwortsatz: Man sollte ca. 2.2 kg an frischer Kamillenblüten sammeln.

Zu Aufgabe 2

Gesucht: Vergleich dreier Volumina:

V_{WA} … *Alkoholvolumen von 1 Glas Wein*
V_{BA} … *Alkoholvolumen von 1 Glas Bier*
V_{SA} … *Alkoholvolumen von 1 Glas Schnaps (Wodka)*

Gegeben:

$V_W = 100\,\text{ml}$ *Volumen von 1 Glas Wein*
$p_W = 12$ *Prozentsatz für den Alkoholanteil des Weines*

$V_B = 250\,\text{ml}$ *Volumen von 1 Glas Bier*
$p_B = 4$ *Prozentsatz für den Alkoholanteil des Bieres*

$V_S = 20\,\text{ml}$ *Volumen von 1 Glas Schnaps*
$p_S = 40$ *Prozentsatz für den Alkoholanteil des Wodkas*

Zuordnung /Wein:

Prozentwerte in ml	V_{WA}	100
Prozentsätze	12	100

Zuordnung /Bier:

Prozentwerte in ml	V_{BA}	250
Prozentsätze	4	100

Zuordnung /Wodka:

Prozentwerte in ml	V_{SA}	20
Prozentsätze	40	100

Lösung:

$V_{WA} = \frac{12 \cdot 100}{100}\,\text{ml}$	$V_{BA} = \frac{4 \cdot 250}{100}\,\text{ml}$	$V_{SA} = \frac{20 \cdot 40}{100}\,\text{ml}$
$V_{WA} = 12\,\text{ml}$	$V_{BA} = 10\,\text{ml}$	$V_{SA} = 8\,\text{ml}$

Vergleich: $V_{WA} > V_{BA} > V_{SA}$

Antwortsatz: Das Glas Wein hat mit 12 ml Alkohol den höchsten Alkoholanteil pro Glas. Das Glas Wodka mit 8 ml pro Glas den niedrigsten. Das Bier mit 10 ml pro Glas den mittleren Alkoholanteil.

Zu Aufgabe 3

Gesucht: m_{Gold}

Gegeben: $m_{Ring} = 6.00\,g$

$p = 33.3$ (333 ‰ = 33.3%)

Zuordnung:

Prozentwerte *in* g	m_{Gold}	6
Prozentsätze	33.3	100

Überschlag: $m_{Gold} \approx \frac{6 \cdot 30}{100}\,g = 1.8\,g$

Lösung:

TRAP	[CLEAR] 6 [×] 33.3 [2nd] [(] [=]
Anzeige	1.998

Vergleich: $1.8\,g \approx 2.00\,g$

Antwortsatz: Der 333er Goldring hat einen reinen Goldgehalt von 2.00 g.

Zu Aufgabe 4

Gesucht: m_{Cu}, m_{Zn}

Gegeben: $m_{\text{Messing}} = 5t$
$p_{Zn} = 21$
$p_{Cu} = 75$

Zuordnung/ Zink:

Prozentwerte *in* t	m_{Zn}	5
Prozentsätze	21	100

Zuordnung/ Kupfer:

Prozentwerte *in* t	m_{Cu}	5
Prozentsätze	75	100

Überschlag: $m_{Zn} \approx \frac{5 \cdot 20}{100} \text{t} = 1\text{t}$ und $m_{Cu} \approx \frac{5 \cdot 80}{100} \text{t} = 4\text{t}$

Lösung:

TRAP/Zn	CLEAR 5 × 21 2nd (=
Anzeige	1.05

TRAP/Cu	CLEAR 5 × 75 2nd (=
Anzeige	3.75

Vergleich: $1\text{t} \approx 1.1\text{t}$ und $4\text{t} \approx 3.8\text{t}$

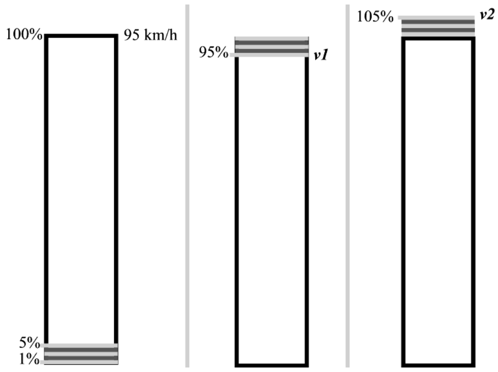
Antwortsatz: Für 5 t Messing werden 1.1 t Zink und 3.8 t Kupfer benötigt.

Zu Aufgabe 5

Gesucht: a) v_1 Mindestgeschwindigkeit
b) v_2 Höchstgeschwindigkeit

Gegeben: $v = 95\,\frac{km}{h};\;\; p = 5\,\%$

Planfigur:



Zuordnung/a)

Prozentwerte *in* $\frac{km}{h}$	v_1	95
Prozentsätze	100-5	100

Zuordnung/b)

Prozentwerte *in* $\frac{km}{h}$	v_2	95
Prozentsätze	100+5	100

Überschlag: $v_1 \approx v_2 \approx 95\,\frac{km}{h}$ und $v_1 < 95\frac{km}{h}$ und $v_2 > 95\frac{km}{h}$

Lösung:

TRAP/a)	$\boxed{\text{CLEAR}}$ 95 $\boxed{\times}$ 95 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{=}$
Anzeige	90.25

TRAP/b)	$\boxed{\text{CLEAR}}$ 95 $\boxed{\times}$ 105 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{=}$
Anzeige	99.75

Vergleich: $90.3\frac{km}{h} \approx 95\ \frac{km}{h}; 99.8\frac{km}{h} \approx 95\ \frac{km}{h}$

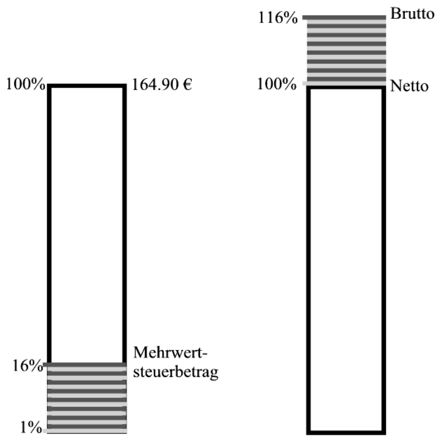
Antwortsatz: Die Mindestgeschwindigkeit beträgt $90.3\frac{km}{h}$ und die Höchstgeschwindigkeit $99.8\frac{km}{h}$.

Zu Aufgabe 6

Gesucht: W in €

Gegeben: $G = 164.90$ €

Planfigur:



*Hinweis: Der **Netto**betrag enthält keinen Mehrwertsteueraufschlag. Der **Brutto**betrag dagegen schon.*

Zuordnung)

Prozentwerte *in €*	*W*	164.90
Prozentsätze	116	100

Überschlag: $W \approx \frac{160 \cdot 100}{100}$ €, $W > 160$ €

Lösung:

TRAP	CLEAR 164.90 × 116 2nd (=
Anzeige	191.284

Vergleich: 191.28 > 160

Antwortsatz: Familie Klemme muss 191.28 € bezahlen.

Zu Aufgabe 7

Gesucht: Wahrheitswert und Begründung

Gegeben:
$p_{6a} = 15$
$p_{6b} = 8$
$p_{ges} = 23$

Zuordnung/6a

Prozentwerte	W_{6a}	G_{6a}
Prozentsätze	15	100

Zuordnung/6b

Prozentwerte	W_{6b}	G_{6b}
Prozentsätze	8	100

Zuordnung/ 6a und 6b

Prozentwerte	$W_{6a} + W_{6b}$	$G_{6a} + G_{6b}$
Prozentsätze	23	100

Lösung:

Aus den drei Zuordnungen ergeben sich drei verschiedene Gleichungen:

a) $W_{6a} = \frac{G_{6a} \cdot 15}{100}$, b) $W_{6b} = \frac{G_{6b} \cdot 8}{100}$, c) $W_{6a} + W_{6b} = \frac{(G_{6a} + G_{6b}) \cdot 23}{100}$

Aus den ersten beiden Gleichungen a) und b) folgt:

$$W_{6a} + W_{6b} = \frac{G_{6a} \cdot 15}{100} + \frac{G_{6b} \cdot 8}{100} \quad |\text{"Wir schreiben auf einen Bruchstrich."}$$

$$= \frac{G_{6a} \cdot 15 + G_{6b} \cdot 8}{100}$$

Gleichsetzen mit c): $\frac{G_{6a} \cdot 15 + G_{6b} \cdot 8}{100} = \frac{(G_{6a} + G_{6b}) \cdot 23}{100}$

Antwortsatz: Die Aussage ist wahr, wenn beide Klassen gleich viele Schüler haben ($G_{6a} = G_{6b}$), sonst ist sie falsch.

Übung 1

Welche Grundaufgabe der Prozentrechnung wird in allen sieben Aufgaben nicht behandelt? Gib einen TRAP und einen Term an, nachdem die fehlende Grundaufgabe effektiv berechnet werden kann! Denke dir eine derartige Aufgabe in Form einer Anwendungsaufgabe aus und löse sie!

Übung 2

Löse die Aufgabe 5 grafisch in einem *p*-*W*-Diagramm!

Übung 3

Karl muss im Rahmen einer Deutschhausaufgabe ein Buch lesen. Nach 17 Tagen hat er bereits 62% aller Seiten des Buches der Reihe nach gelesen und ist auf Seite 138. Wie viele Seiten hat dieses Buch?
Hinweis: Die Gesamtzahl eines Buches ist immer eine durch 4 teilbare Zahl.

Übung 4

Beim Barkauf eines Neuwagens gibt der Autoverkäufer 15% Rabatt auf die Verkaufssumme von 26500,00 €. Wie viel soll der Kunde tatsächlich bezahlen?

Hinweis: Ein Rabatt ist ein Preisnachlass aus einem besonderen Anlass (zum Beispiel: Saisonrabatt, Mengenrabatt, Barzahlungsrabatt).

Übung 5

An einem Produktionsfließband werden pro Minute 650 Teile weiterverarbeitet, auf Ausschuss hin kontrolliert und gegebenenfalls auch als Ausschussware selektiert. Der Rest der vorproduzierten Ware wird unmittelbar für den Verkauf vorbereitet. Was bedeuten die Aussagen?

a) „Ca. 4% der auf dem Band liegenden Ware wird pro Minute als Ausschussware vom Band entfernt.

b) Im Falle einer Rationalisierung könnte bei gleichbleibender Zahl produzierter Ware pro Minute eine Senkung der Ausschussware um 2.2% erreicht oder bei gleicher Ausschussquote die Zahl der vorproduzierten Ware auf 124% gesteigert werden.

Übung 6

Ein Computer wird in einer Anzeige für einen Preis von 780,00 € exklusive (*ausschließlich*) 16 % Mehrwertsteuer angeboten. Wie viel kostet der Rechner inklusive (*einschließlich*) Mehrwertsteuer?

Lisa rechnet so:

Grundwert	**780.00 €**	**100%**
Zwischenwert für 1% berechnen:	7.800 €	1%
Prozentwert für 16% berechnen:	124.80 €	16%
Preis inklusive MwSt.	**904.80 €**	Summe

Kai rechnet kürzer: $780 \cdot 1.16 = 904.8$

Antwort von Kai und Lisa: Der Computer kostet inklusive Mehrwertsteuer 904.80 €.

Erläutere ausführlich die Rechenwege von Lisa und Kai! Stelle den Zusammenhang zur Grundgleichung her!

Übung 7

Ein Händler gibt einer Kundin bei fristgerechter Rechnungszahlung innerhalb der nächsten 14 Tage auf den Kauf einer Ware 2% Skonto. Wie viel muss die Kundin an den Händler überweisen, wenn die Ware 740,00 € kostet?

Hinweis: Das Skonto ist ein vereinbarter Preisnachlass und wird im Allgemeinen dann gegeben, wenn ein bestimmter Zahlungsbetrag innerhalb einer vereinbarten Frist gezahlt wird.

2 Zinsrechnung

2.1 Jahreszinsen

Wenn man sich ein Sparkonto auf einer Bank einrichtet, so erhält man von der Bank eine jährliche Vergütung für die Spareinlage, die *Zinsen*. Die Zinsen sind die Prozentwerte und entsprechen im Sinne der Grundgleichung, die auch hierbei gilt, einem zwischen Bank und Kunde vereinbarten Prozentsatz des auf dem Sparkonto befindlichen Guthabens. Das Guthaben, auch Kapital genannt, ist dabei der Grundwert.
Zinsen werden auch im umgekehrten Fall vom Kunden an die Bank zu zahlen, wenn dieser dort einen Kredit aufnimmt, also Geld von der Bank ausleiht.

Prozentrechnung:	Grundwert ***G***	Prozentsatz ***p***	Prozentwert ***W***	$\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$
Zinsrechnung:	Guthaben/ Kapital ***K***	Zinssatz ***p***	Zinsen ***Z***	$\frac{Z}{p} = \frac{K}{100}$

Aufgabe 1

Raffael hat auf der Sparkasse ein Sparguthaben in Höhe von 2500.00 € auf einem Konto für ein Jahr angelegt. Er erhält von der Bank einen vereinbarten Zinssatz von 1.25%. Wie viel Zinsen erhält Raffael am Ende des Jahres?

Gesucht: Z_{Jahr} in €

Gegeben: $K = 2500.00$ €

$p = 1.25$

Zuordnung:

Zinsen in € *(Prozentwerte)*	Z_{Jahr}	2500.00
Zinssätze *(Prozentsätze)*	1.25	100

Schema: $2500.00 \xrightarrow{\cdot 1.25\%} Z_{Jahr}$

Überschlag: $Z_{Jahr} \approx \frac{2500 \cdot 1}{100} € = 25 €$

Lösung:

TRAP	[CLEAR] 2500 [×] 1.25 [2nd] [(] [=]
Anzeige	31.25

Vergleich: $31.25 € \approx 25 €$

Antwortsatz: Am Jahresende erhält Raffael von der Bank 31.25 € Zinsen.

Dabei muss aber vorausgesetzt werden, dass sich das Guthaben in dem betreffenden Jahr nicht ändert. Es darf in diesem Zeitraum weder Geld vom Konto abgehoben bzw. Geld auf das Konto eingezahlt werden.

2.2 Anteilige Zinsrechnung

In der Zinsrechnung spielt die *Größe **Zeit t*** eine wichtige Rolle.

Im Allgemeinen bezieht sich der Zinssatz auf ein Jahr, abgekürzt mit ***p.a.*** (*lateinisch: per annum – pro Jahr*)

Im deutschen Bankwesen ist festgesetzt: **1 Jahr = 360 Tage**

1 Jahr = 12 Monate

1 Monat = 30 Tage.

Centbeträge werden grundsätzlich nicht mitverzinst.

Zinsbeträge an Endkunden werden grundsätzlich abgerundet.

Aufgabe 2

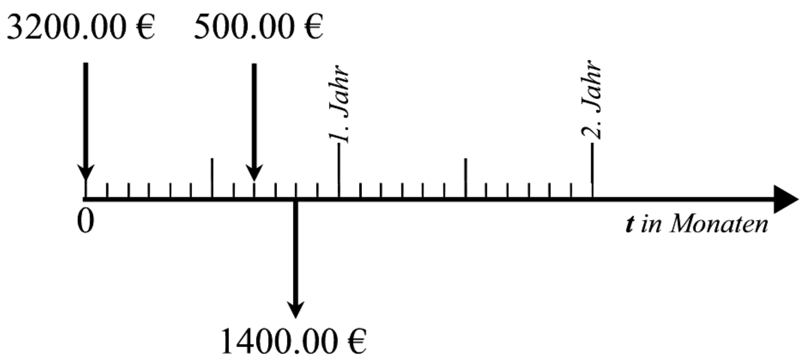
Zu Beginn des Jahres befinden sich auf dem Konto von Sven ein Guthaben von 3200.00 €. Nach 8 Monaten zahlt Sven 500.00 € zusätzlich auf dieses Konto ein, 2 Monate später werden von ihm 1400.00 € abgehoben. Der Zinssatz für ein Jahr beträgt 2.4%.

a) Wie hoch sind die Zinsen nach Ablauf des ersten Jahres?
b) Wie hoch sind die Zinsen nach Ablauf der ersten 100 Tage?

Zu a)

Gesucht: Z_{ges} in €

Gegeben: *Planfigur für die Kontobewegung*



$p = 2.4$

Lösung:

8 Monate:	2 Monate:	2 Monate:
$K_1 = 3200.00\,€$	$K_2 = 3200.00\,€ + 500.00\,€$ $= 3700.00\,€$	$K_3 = 3700.00\,€ - 1400.00\,€$ $= 2300.00\,€$

Berechnung der Zinsen für die ersten 8 Monate:

$$\underbrace{3200 \xrightarrow{\cdot 2.4\%} Z_{Jahr}}_{Jahreszinsen} \underbrace{\xrightarrow{\cdot \frac{8}{12}} Z_1}_{Anteilige\ Zinsen}$$

TRAP	$\boxed{\text{CLEAR}}$ 3200 $\boxed{\times}$ 2.4 $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\times}$ 8 $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{=}$

Anzeige	51.2

Berechnung der Zinsen für die nachfolgenden 2 Monate:

$$\underbrace{3700 \xrightarrow{\cdot 2.4\%} Z_{Jahr}}_{Jahreszinsen} \underbrace{\xrightarrow{\cdot \frac{2}{12}} Z_2}_{Anteilige\ Zinsen}$$

TRAP	CLEAR 3700 × 2.4 2nd (× 2 ÷ 12 =
Anzeige	14.8

Berechnung der Zinsen für die restlichen 2 Monate:

$$\underbrace{2300 \xrightarrow{\cdot 2.4\%} Z_{Jahr}}_{Jahreszinsen} \underbrace{\xrightarrow{\cdot \frac{2}{12}} Z_3}_{Anteilige\ Zinsen}$$

TRAP	CLEAR 2300 × 2.4 2nd (× 2 ÷ 12 =
Anzeige	9.2

Berechnung der Zinsen nach Ablauf des ersten Jahres:

$$\begin{aligned} Z_{ges} &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ &= 51.20\,€ + 14.80\,€ + 9.20\,€ \\ &= \underline{\underline{75.20\,€}} \end{aligned}$$

Antwort: Am Jahresende betragen die Zinsen 75.20 €.

Zu b)

Gesucht: Z_{Tag} in €

Gegeben: t = 100 d (=3.3 Monate)

p = 2.4

Lösung: Die ersten 100 Tage fallen in die ersten acht Monate hinein.

$$\underbrace{3200 \xrightarrow{\cdot 2.4\%} Z_{Jahr}}_{\text{Zinsen nach einem Jahr}} \underbrace{\xrightarrow{\cdot\frac{100}{360}} Z_{Tag}}_{\text{Anteilige Zinsen}}$$

TRAP	CLEAR 3200 × 2.4 2nd (× 100 ÷ 360 =
Anzeige	21.33333333

Antwort: Nach Ablauf der ersten 100 Tage betragen die Zinsen 21.33 €.

Übung 1

Wie hoch sind die Zinsen nach Ablauf der ersten 200 (310) Tage?

2.3 Einblick in die Zinseszinsrechnung

Wird Startkapital jährlich verzinst, so spricht man nach Ablauf des ersten Jahres vom *verzinsten Kapital* und meint damit, dass die Summe aus Startkapital und Jahreszinsen gebildet wurde. Das Startkapital ist um die Zinsen angewachsen. Wird nun dieses verzinste Kapital wieder verzinst, man wartet wieder ein Jahr ab, so wächst das Kapital um einen „neuen“ Zinsbetrag an. Man spricht bei dieser Rechenart von *Zinseszinsrechnung*.

Werden Zinsen dem Guthaben (Kapital) hinzugefügt, so handelt es sich nicht mehr um Zinsrechnung, sondern um Zinseszinsrechnung.

Die Mathematik liefert hierzu einfache Rechenmodelle in Form von Gleichungen. Wir werden aber nur einen Einblick in die Zinseszinsrechnung nehmen und auf jene Gleichungen verzichten.

Aufgabe 1

Ein Sparguthaben von 5000.00€ wird für drei Jahre mit 2.6% fest verzinst. In dieser Zeitspanne gibt es keine weitere Kontobewegungen. Wie hoch wird das Guthaben nach den drei Jahren sein?

Gesucht: K_3 in €

Gegeben: $K_0 = 5000.00\,€$

$t = 3\,\text{Jahre}$

Lösung: Nach Ablauf des ersten Jahres:

$5000 \xrightarrow{\cdot 2.6\%} Z_1$

$Z_1 \xrightarrow{+5000} K_1$

TRAP 1	CLEAR 5000 × 2.6 2nd (+ 5000 =
Anzeige	5130

Nach Ablauf des zweiten Jahres:

$5130 \xrightarrow{\cdot 2.6\%} Z_2$

$Z_2 \xrightarrow{+5130} K_2$

TRAP 2	× 2.6 2nd (+ 5130 =
Anzeige	5263.38

Nach Ablauf des dritten Jahres:

$5263 \xrightarrow{\cdot 2.6\%} Z_3$

$Z_3 \xrightarrow{+5263} K_3$

TRAP 3	[CLEAR] 5263 [×] 2.6 [2nd] [(] [+] 5263 [=]
Anzeige	5399.838

Antwort: Nach Ablauf der drei Jahren wird das Guthaben auf 5399.00 € angestiegen sein.

Übung 1

Lässt sich der TRAP 3 nicht kürzer gestalten? Zum Beispiel direkt nach TRAP 2 wie:

TRAP 3*	[×] 2.6 [2nd] [(] [+] 5263.38 [=]

?

2.4 Berechnen des Kapitalwertes

Aufgabe 1

Familie Schubert möchte ihre neue Wohnzimmereinrichtung durch ein Privatdarlehen finanzieren. Die Hausbank bietet Familie Schubert einen Kredit für 9.6% Zinsen an. Nach Berechnungen eines Bankangestellten würden nach Ablauf des ersten Jahres Zinsen in Höhe von 720.00 € anfallen. Wie hoch ist der angebotene Kreditbetrag?

Gesucht: K in €

Gegeben: $p = 9.6$

Lösung: Wenn der Kreditbetrag (gleich Kapitalbetrag) K bekannt ist, dann kann man nach dem Schema: $K \xrightarrow{\cdot 9.6\%} 720\,€$ vorgehen.

Wenn aber K gesucht ist, dann kehrt man die Pfeilrichtung und den Operator einfach um: $K \xleftarrow{\div 9.6\%} 720\,€$.

TRAP	CLEAR 720 ÷ 9.6 2nd (=
Anzeige	7500

Antwort: Der angebotene Kreditbetrag für Familie Schubert beträgt 7500.00€.

Übung 1

Zu diesem Kredit würden dann noch eine einmalige Verwaltungsgebühr von 1.5% von der Kreditsumme hinzugerechnet werden müssen. Wie hoch wäre das tatsächliche Darlehen?

2.5 Berechnen der Zeitspanne

Aufgabe 1

Für das Überziehen einer Rechnung von 850.00€ wurden 9.50€ Verzugszinsen bei 9.9% p.a. in Rechnung gestellt. Um wie viel Tage wurde die Rechnung überzogen.

Gesucht: t in d

Gegeben: $K = 850.00€$
$Z_{Tage} = 9.50€$
$p = 9.9$

Lösung: Schema:

$$\underbrace{850\,€ \xrightarrow{\cdot 9.9\%} Z_{Jahr}}_{Jahreszinsen} \underbrace{\xrightarrow{\frac{t}{360}} 9.50\,€}_{Anteilige\ Zinsen}$$

$$\left(850 \cdot \frac{9.9}{100}\right) \cdot \left(\frac{t}{360}\right)$$

Aus dem Schema entsteht die Gleichung:

$$\left(850\cdot\frac{9.9}{100}\right)\cdot\frac{t}{360}=9.50$$

Wir erweitern den Bruch $\frac{9.9}{100}$ mit 10:

$$\left(850\cdot\frac{99}{1000}\right)\cdot\frac{t}{360}=9.50$$

Wir lösen schrittweise nach *t* auf. Dabei benutzen wir den TR:

$$\begin{aligned}\left(850\cdot\frac{99}{1000}\right)\cdot\frac{t}{360}&=9.50 && \text{| Wir vereinfachen zuerst den}\\ & && \text{Term in der Klammer und erhalten 84.15.}\\ 84.15\cdot\frac{t}{360}&=9.50 && |\,84.15\div 360=0.23375\\ 0.23375\cdot t&=9.50 && |\div 0.23375\\ t&=9.50\div 0.23375\\ t&=40.64171123\end{aligned}$$

Die Lösung erscheint als Näherungswert. Wir runden sinnvoll: $40.64171123\approx 41$.

Antwort: Die Rechnung wurde um 41 Tage überzogen.

Übung 1

Um wie viel Tage wurde die Rechnung überzogen, wenn es sich um eine doppelt so hohe Rechnungssumme handelt?

2.6 Berechnen des Zinssatzes

Aufgabe 4

Herr Lange möchte einen Kredit bei einer Bank aufnehmen. Er benötigt 4600 €.

Angebot der Bank A	***Angebot der Bank B***
Kreditbetrag: 5000.00 €	*Kreditbetrag: 4800.00 €*
Jahreszinsen: 390.00 €	*Jahreszinsen: 385.00 €*

Welches Angebot sollte Herr Lange annehmen?

Gesucht: Vergleich von p_A, p_B

Gegeben: $K_A = 5000.00\,€$ $K_B = 4800.00\,€$
$Z_A = 390.00\,€$ $Z_B = 385.00\,€$

Zuordnung A:

Zinsen in € *(Prozentwerte)*	390.00	5000.00
Zinssätze *(Prozentsätze)*	p_A	100

Gleichung: $p_A = \frac{390 \cdot 100}{5000}$

Lösung:

TRAP	CLEAR 390 × 100 ÷ 5000 =
Anzeige	7.8

Zuordnung B:

Zinsen in € *(Prozentwerte)*	*385.00*	4800.00
Zinssätze *(Prozentsätze)*	p_B	100

Gleichung: $p_B = \frac{385 \cdot 100}{4800}$

Lösung:	*TRAP*	$\boxed{\text{CLEAR}}$ 385 $\boxed{\times}$ 100 $\boxed{\div}$ 4800 $\boxed{=}$
	Anzeige	8.020833333

Vergleich: $7.8 < 8.0$

Antwortsatz: Herr Lange sollte sich für das Angebot A entscheiden, es hat einen niedrigeren Zinssatz als Angebot B.

Zusammenfassung:

Gesucht	***Z***	***p***	***K***
Term	$K \cdot p\%$ *oder* $\frac{K \cdot p}{100}$	$\frac{Z}{K\%}$ *oder* $\frac{Z \cdot 100}{K}$	$\frac{Z}{p\%}$ *oder* $\frac{Z \cdot 100}{p}$

Monatszinsen für *m* Monate im Jahr *(Ein Jahr gleich 12 Monate)*	**Tageszinsen** für *n* Tage im Jahr *(Ein Jahr gleich 360 Tage)*
$\underbrace{K \xrightarrow{\cdot p\%} Z_{Jahr}}_{Jahreszinsen} \underbrace{\xrightarrow{\cdot \frac{m}{12}} Z_{Monat}}_{Anteilige\ Zinsen}$	$\underbrace{K \xrightarrow{\cdot p\%} Z_{Jahr}}_{Jahreszinsen} \underbrace{\xrightarrow{\cdot \frac{n}{360}} Z_{Tag}}_{Anteilige\ Zinsen}$
$Z_{Monat} = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{m}{12}$	$Z_{Tag} = \frac{K \cdot p}{100} \cdot \frac{n}{360}$

3 Abschlusstest

Hinweise: Für diesen Test solltest du nicht mehr als 45 min Arbeitszeit benötigen. Verwende sinnvoll deinen TR. Dokumentiere klar verständlich alle deine Lösungen. Formuliere deine Ergebnisse zu den Aufgaben 2 bis 5 verbal.

Aufgabe 1

Übertrage die Tabelle auf dein Arbeitsblatt und vervollständige sie und runde dabei sinnvoll!

	a)	*b)*	*c)*
Prozentwert		450	72
Prozentsatz	19		98
Grundwert	458	250	

Aufgabe 2

Beim Mahlen von Roggen beträgt die Mehlausbeute 75%. Wie viel Tonnen Roggen werden benötigt, um 60 t Mehl zu gewinnen?

Aufgabe 3

In einem Telekommunikationswerk konnten durch technische Verbesserungen die Produktion von täglich 24085 Handys auf täglich 24350 erhöht werden. Auf wie viel Prozent stieg die monatliche Produktion?

Aufgabe 4

Führe geeignete Überschlagsrechnungen aus! Beginne mit entsprechenden Überschlagschemata!

a) Wie viel Prozent sind ungefähr 115 kg von 1902 kg?

b) Wie groß ist ungefähr der Grundwert, wenn 0.82 mm etwa 22% betragen.

Aufgabe 5

Ein Taschenrechner kostet im Ladengeschäft 18.90 €. Wie viel kostet der Taschenrechner für Nico, wenn sein Vater die Mehrwertsteuer von 16% übernehmen will?

Aufgabe 6

a) Wie hoch sind die Jahreszinsen bei einem Guthaben von 12600 € bei einem Zinssatz von 2.8%?

b) Welcher Geldbetrag kann von diesem Konto nach 8 Monaten Laufzeit abgehoben werden, wenn danach der Kontostand auf Haben Null stehen soll?

Aufgabe 7

Karl muss im Rahmen einer Deutschhausaufgabe ein Buch lesen. Um den Termin für die Erfüllung der Aufgabe einhalten zu können, stellt sich Karl einen Lese-Zeitplan auf. Innerhalb von vier Wochen möchte er das Buch einmal vollständig gelesen haben. Nach 17 Tagen hat er bereits 62% aller Seiten des Buches der Reihe nach gelesen und ist auf Seite 138. Wird er den Zeitplan einhalten können?

Aufgabe 8

Frau Müller und Herr Klausen unterhalten sich. Frau Müller erzählt: „Für meine Wohnung zahle ich 26% meines Gehaltes an Miete.“
Herr Klausen erwidert: „Die Miete für meine Wohnung beträgt nur 22% meines Gehaltes.“ Es stellt sich heraus, dass beide denselben Betrag an Miete zahlen. Wie viel Prozent verdient Frau Müller weniger als Herr Klausen?

4 Lösungen zum Abschlusstest
(mit 30 Bewertungseinheiten)

Zu Aufgabe 1 *(3 BWE)*

	a)	*b)*	*c)*
Prozentwert	***87***	450	72
Prozentsatz	19	***180***	98
Grundwert	458	250	***73***

Zu Aufgabe 2 *(3 BWE)*

Lösung:

Prozentwerte *in t*	60	***G***
Prozentsätze	75	100

$$G = \frac{60\,\text{t} \cdot 100}{75}$$

Antwortsatz: Um 60 t Mehl zu gewinnen, werden 80 t Roggen benötigt.

Zu Aufgabe 3 *(3 BWE)*

Lösung:

Prozentwerte	24350	24085
Prozentsätze	*p*	100

$$p = \frac{24350 \cdot 100}{24085} \text{ (täglich oder monatlich)}$$

Antwortsatz: Die monatliche Produktion von mobilen Telefonen stieg auf 101.10%.

Zu Aufgabe 4 *(4 BWE)*

a) Zum Beispiel: $2000\,\text{kg} \xrightarrow{\cdot x\%} 100\,\text{kg}$; $x = \frac{100}{2000} = 5\%$

Ungefähr *p*=5%.

b) Zum Beispiel: $x \xrightarrow{\cdot 20\%} 1\,\text{mm}$; $x = 1\,\text{mm} \div \frac{1}{5} = 5\,\text{mm}$

Ungefähr *G*=5mm.

Zu Aufgabe 5 *(3 BWE)*

Lösung:

Prozentwerte in €	18.90	*G*
Prozentsätze	116	100

$$G = \frac{100 \cdot 18.9}{116}$$

Antwortsatz: Für Nico kostet nach Abzug der Mehrwertsteuer der Taschenrechner nur noch 16.29 €.

Zu Aufgabe 6 *(5 BWE)*

Lösung:

$$\underbrace{12600\ € \xrightarrow{\cdot 2.8\%} Z_{Jahr}}_{Jahreszinsen} \underbrace{\xrightarrow{\cdot \frac{8}{12}} Z_{Monat}}_{Anteilige\ Zinsen}$$

$$Z_{Jahr} = \frac{12600 \cdot 2.8}{100}\,€ \quad \text{und}$$
$$= 352.8\,€$$

$$Z_{Monat} = 352.8\,€ \cdot \frac{8}{12}$$
$$= 235.2\,€$$

$$12600\ € \xrightarrow{+235.2\,€} K_1$$
$$K_1 = 12835.20\,€$$

Antwortsatz: Die Jahreszinsen betragen 352.80 €. Nach 8 monatiger Laufzeit kann ein Betrag von 12835.20 € abgehoben werden. *Dabei muss aber vorausgesetzt werden, dass sich das Guthaben in dem betreffenden Zeitraum nicht ändert.*

Zu Aufgabe 7 *(3 BWE)*

Lösung:

Zeit *t* in d	17	*G*
Prozentsätze	62	100

$$\frac{17 \cdot 100}{62} \leq 28$$

Antwortsatz: Karl wird für das Lesen des Buches den Zeitplan von 28 Tagen einhalten können.

Zu Aufgabe 8 *(6 BWE)*

Frau Müller hat ein Gehalt G_M in Euro) und zahlt davon die Miete m_M (in Euro).

Prozentwerte in €	m_M	G_M
Prozentsätze	26	100

$$m_M = \frac{26 \cdot G_M}{100}$$

Herr Klausen hat ein Gehalt G_K (in Euro) und zahlt davon die Miete m_K (in Euro).

Prozentwerte in €	m_K	G_K
Prozentsätze	22	100

$$m_K = \frac{22 \cdot G_K}{100}$$

Es gilt:

$$m_M = m_K$$

$$\frac{26 \cdot G_M}{100} = \frac{22 \cdot G_K}{100} \cdot$$

Wir vereinfachen die Gleichung, indem wir auf beiden Seiten 100 multiplizieren.

$$26 \cdot G_M = 22 \cdot G_K$$

Auf beiden Seiten der Gleichung dividieren wir durch $(26 \cdot G_K)$.

$$\frac{G_M}{G_K} = \frac{22}{26}.$$

Wir vereinfachen die rechte Seite, indem wir einen Dezimalbruch als Näherungswert aufschreiben.

$$\frac{G_M}{G_K} = 0.8462$$

Wir nähern die rechte Seite einem Bruch mit dem Nenner 100 an.

$$\frac{G_M}{G_K} = \frac{85}{100}$$

Wir schlussfolgern: Wenn das Gehalt von Herr Klausen 100% beträgt, dann hat Frau Müller 100%-85% an Gehalt weniger als Herr Klausen.

Antwortsatz: Frau Müller verdient 15% weniger als Herr Klausen.

5 Lösungen zu den Übungen – Prozentrechnung

L 1.1 Übungen und Wiederholungen

Zu Übung 1

a) $\frac{71}{1000}$ b) $\frac{451}{250}$ c) $\frac{2777}{5000}$

Zu Übung 2

a) 0.3 b) $0.\overline{36}$ c) 0.625 d) 0.5

Zu Übung 3

a) 10 min b) 8533.3 t

Zu Übung 4

a) 60 min b) 908 kg

Zu Übung **5**

Teiler von 100: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

Zu Übung 6

a) Anteil der Mädchen: $\frac{3}{7} \approx 0.43$ b) Anteil der Jungen: $\frac{8}{17} \approx 0.47$ c) *um* nahezu 100%

Zu Übung 7

a) $\frac{80}{100} \left(= \frac{800}{1000}\right)$ b) $\frac{1}{100} \left(= \frac{10}{1000}\right)$ c) $\frac{25}{100} \left(= \frac{250}{1000}\right)$

Zu Übung 8

Klasse 7a) $\frac{9}{28} \approx 0.32$

Klasse 7b) $\frac{7}{25} = 0.28$

Klasse 7c) $\frac{6}{24} = 0.25$

In der Klasse *7a)* ist mit dem *größten Schüleranteil von 0.32* die Sportart Volleyball am beliebtesten.

Zu Übung 9

a) $\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$ b) $\frac{3}{3}=\frac{100}{100}$ c) $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$ d) $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$

e) $\frac{1}{5}=\frac{20}{100}$ f) $\frac{4}{5}=\frac{80}{100}$ g) $\frac{11}{10}=\frac{110}{100}$ h) $\frac{60}{6000}=\frac{1}{100}$

L 1.2 Grundbegriffe der Prozentrechnung

Zu Übung 1

a) $50\%=0.5=\frac{1}{2}$ b) $100\%=1$ c) $1\%=0.01=\frac{1}{100}$ d) $75\%=0.75=\frac{3}{4}$

e) $2\%=0.02=\frac{1}{50}$ f) $450\%=4.5=\frac{9}{2}$ g) $10\%=0.1=\frac{1}{10}$ h) $33.333\%=0.33333 \approx \frac{1}{3}$

Zu Übung 2

a ist die Gesamtzahl aller Sitze im Parlament, $a\in\mathbb{N}^*$

	Partei A	*Partei B*	*Partei C*	*Partei D*
Prozentangaben	44%	28%	23%	5%
Schema	$a\xrightarrow{\cdot 44\%}\frac{44}{100}\cdot a$	$a\xrightarrow{\cdot 28\%}\frac{28}{100}\cdot a$	$a\xrightarrow{\cdot 23\%}\frac{23}{100}\cdot a$	$a\xrightarrow{\cdot 5\%}\frac{5}{100}\cdot a$
Term für W	$\frac{11}{25}\cdot a$	$\frac{7}{25}\cdot a$	$\frac{23}{100}\cdot a$	$\frac{1}{20}\cdot a$
$a=80$	35	22	18	4

Es werden tatsächlich nur 79 Sitze verteilt.

Zu Übung 3

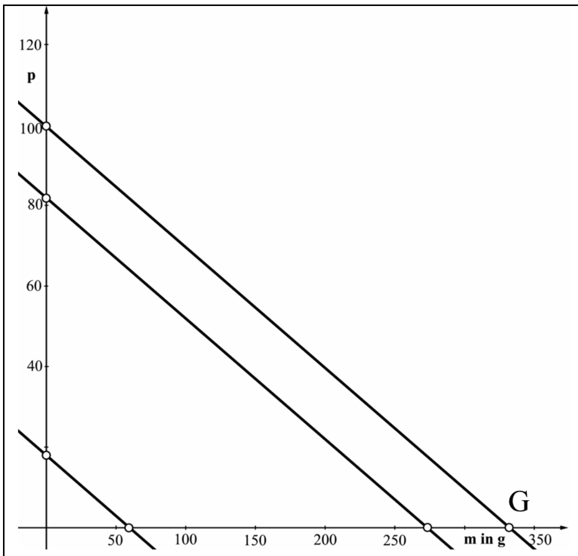
Beide schraffierten Flächen sind gleich groß, denn die Fläche des zweiten Rechtecks ist mit $10\,cm^2$ doppelt so groß wie die des ersten.

Zu Übung 4

Diese Frage kann man nicht beantworten, da man im Allgemeinen von unterschiedlichen monatlichen Einkommen ausgehen muss. Die verschiedenen Einkommen stellen verschiedene Grundwerte dar, aus denen sich dann auch unterschiedliche Prozentwerte ergeben <u>können</u>.

L 1.3 Grafisches und numerisches Lösen von Prozentaufgaben

Zu Übung 1



Interpretation des *p*-*W*-Diagramms:
Die erste Achse kennzeichnet die Masse in Gramm. Auf der zweiten Achse sind die Prozentwerte angetragen. Die in Ursprungsnähe liegende Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1(50,0)$ und $P_2(0,18)$. Zu ihr parallel liegen zwei weitere Geraden g_2 und g_3 mit $g_2((273,0),(0,82))$ und $g_3((G,0),(0,100))$.

Wir lesen den Grundwert G ab: $G \approx 330\,g$.
Dabei gilt für G: $273\,g + 60\,g \approx 330\,g$.

Zu Übung 2

Die betreffenden Geraden liegen *parallel* zueinander.

Zu Übung 3

Die Zelle, in der der Grundwert *G* steht, hat zwei Eigenschaften, die sich in der betreffenden Zeile und Spalte widerspiegeln.

(1) Zeile von *G* enthält die gleiche Größeneinheit wie der Prozentwert *W*.
(2) Spalte von *G* enthält auch die Zahl 100.

L 1.4 Der rationelle Umgang mit dem TR

Zu Übung 1

a) Ü: 10% von 180 kg sind W_1
$W_1 \approx 18\,\text{kg}$.

b) Ü: 50% von G_1 sind 250 m.
$G_1 \approx 500\,\text{kg}$

c) Ü: 2 m von 40 m sind $p_1\%$.
$p_1 \approx 5$

d) Ü: 90 cm^2 von 100 cm^2 sind $p_2\%$.
$p_2 \approx 90$

e) Ü: 150% von 300 t sind W_2.
$W_2 \approx 450\,\text{t}$

f) Ü: 5% von 1 l sind W_3.
$W_3 \approx 0.05$ l

g) Ü: 1% von G_2 sind 5 m^3.
$G_2 \approx 500\,m^3$

h) Ü: 20 € von 40 € sind $p_3\%$.
$p_3 \approx 50$

Zu Übung 2

TRAP-Anzeige: 26.46464646

Interpretation 1:
131 m von G sind 495%. Wie groß ist G?
$G = 26.5\,\text{m}$

Interpretation 2:
131 Bäume von 495 Bäumen sind p%.
$p = 26.5$

Zu Übung 3

Grundgleichung: $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$

18% von 10g sind W_1.

$$\frac{W_1}{18} = \frac{10\,\text{g}}{100}$$

$$W_1 = \frac{10\,\text{g}}{100} \cdot 18 = \underline{\underline{1.8\,\text{g}}}$$

10% von 18g sind W_2.

$$\frac{W_2}{10} = \frac{18\,\text{g}}{100}$$

$$W_2 = \frac{18\,\text{g}}{100} \cdot 10 = \underline{\underline{1.8\,\text{g}}}$$

Vergleich: $W_1 = W_2$

Zu Übung 3

Gesucht	Gegeben	TRAP	Interpretation
W	$p = 25\%$	CLEAR 400 ×	25% von 400 mm sind W.
	$G = 400\,\text{mm}$	25 2nd (=	$W = 100$ mm
p	$W = 80\,\text{g}$	CLEAR 80 ÷	80 g von 90 g sind p%.
	$G = 90\,\text{g}$	90 2nd (=	$p = 88.9\%$.
G	$p = 85\%$	CLEAR 0.5 ÷	85% von G sind 0.5 m.
	$W = 0.5\,\text{m}$	85 2nd (=	$G = 0.6\,\text{m}$.

Man beachte, dass alle TR-Ausgaben sinnvoll gerundet sind, da Näherungswerte gegeben sind.

L 1.5 Sieben Anwendungsaufgaben

Zu Übung 1

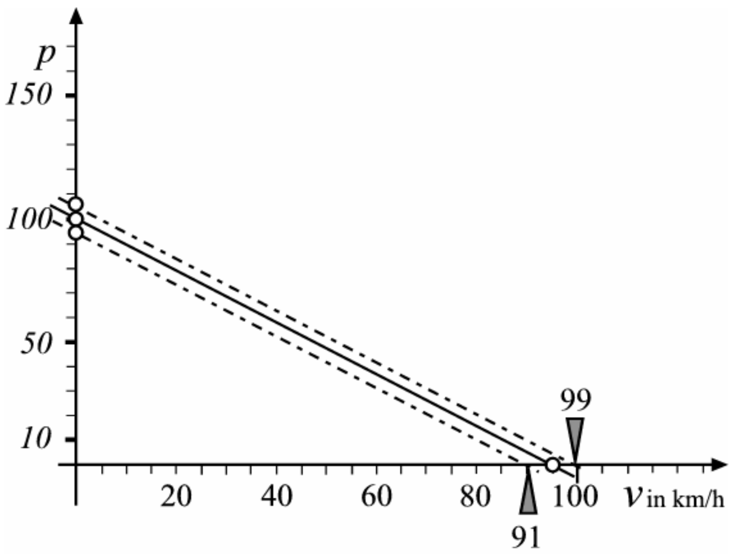
Es fehlt eine Grundaufgabe zur Berechnung des Prozentsatzes p.

TRAP für p: $\boxed{\text{CLEAR}}$ W $\boxed{\div}$ G $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{(}$ $\boxed{=}$

Term für die Berechnung von p: $\frac{W \cdot 100}{G}$

Anwendungsaufgabe und Lösung: …
Man achte auf eine sinnvolle Genauigkeit im Ergebnis.

Zu Übung 2



$91\frac{km}{h}$	$95\frac{km}{h}$
100-5	100

$99\frac{km}{h}$	$95\frac{km}{h}$
100+5	100

Die Mindestgeschwindigkeit beträgt $91\frac{km}{h}$ und die Höchstgeschwindigkeit $99\frac{km}{h}$.

Zu Übung 3

TR-Anzeige: 222.5806452; **224** Seiten hat das Buch. *(Seitenzahl ist durch 4 teilbar.)*

Zu Übung 4

Der Kunde soll für den Neuwagen 22525.00 € bezahlen.

Zu Übung 5

a) Von den 650 Teilen werden pro Minute ca. 26 Teile als Ausschussware vom Band entfernt.

b) Bei gleichbleibender Zahl produzierter Ware müssten bei einer Senkung der Ausschussware ca. 12 Teile pro Minute vom Band entfernt werden.

Bei gleicher Ausschussquote könnte im Falle einer Steigerung der vorproduzierten Ware auf 124% 806 Teile pro Minute auf dem Band geprüft werden.

Zu Übung 6

Zum Rechenweg von Lisa: Mit dem Term $\frac{780}{100}\cdot 16$ berechnet sie die Zahl 124.8 als Zwischenergebnis. Anschließend addiert sie zu der Größe 124.80 € den Grundwert 780.00 € und erhält das Ergebnis 904.80 €.

Grundwert	**780.00 €**	**100%**	Rechnen mit Termen (ohne Einheit €)
Zwischenwert für 1% berechnen:	7.800 €	1%	$\frac{780}{100}$
Prozentwert für 16% berechnen:	124.80 €	16%	$\frac{780}{100}\cdot 16$
Preis inklusive MwSt.	**<u>904.80 €</u>**	Summe	$780+\frac{780}{100}\cdot 16$

Zusammenhang zur Grundgleichung: Stellt man die Grundgleichung nach *W* um und setzt die gegebenen Werte (ohne Einheit) ein, so erhält man das Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} W &= \frac{780\cdot 16}{100} \\ &= 124.8 \end{aligned}$$

Zum Rechenweg von Kai: Vereinfacht man die Summe von Lisa $\left(780+\frac{780}{100}\cdot 16\right)$ weiter, indem man den Grundwert 780 nach dem Distributivgesetz ausklammert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 780+\frac{780}{100}\cdot 16 &= 780\cdot\left(1+\frac{16}{100}\right) \\ &= 780\cdot 1.16 \qquad \text{(Ansatz von Kai)} \\ &= 904.8 \end{aligned}$$

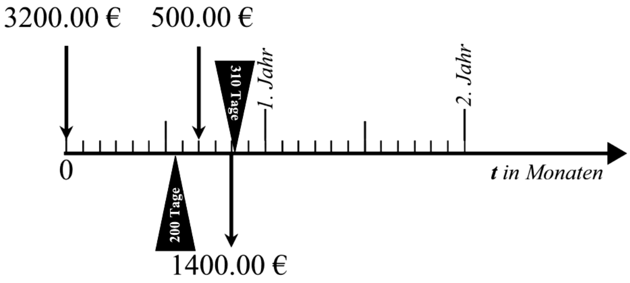
Zu Übung 7

Die Kundin muss nach Abzug von Skonto 725.20 € an den Händler zahlen.

6 Lösungen zu den Übungen - Zinsrechnung

L 2.2 Anteilige Zinsrechnung

Zu Übung 1 (in Bezug auf Aufgabe 2)



zu c)

$$\underbrace{3200 \xrightarrow{\cdot 2.4\%} Z_{Jahr}}_{\text{Jahreszinsen}} \underbrace{\xrightarrow{\cdot \frac{200}{360}} Z_{200\text{d}}}_{\text{Anteilige Zinsen}}$$

$$Z_{200\text{d}} = \underline{\underline{42.67\,€}}$$

zu d)

$$\underbrace{2300 \xrightarrow{\cdot 2.4\%} Z_{Jahr}}_{\text{Jahreszinsen}} \underbrace{\xrightarrow{\cdot \frac{10}{360}} Z_{10\text{d}}}_{\text{Anteilige Zinsen}}$$

$$Z_{10\text{d}} = \underline{1.53\,€}$$

$$\begin{aligned} Z_{310\text{d}} &= Z_1 + Z_2 + Z_{10\text{d}} \text{ mit } Z_1 = Z_{240\text{d}} \text{ und } Z_2 = Z_{60\text{d}} \\ &= Z_{240\text{d}} + Z_{60\text{d}} + Z_{10\text{d}} \\ &= 51.20\,€ + 14.80\,€ + 1.53\,€ \\ &= \underline{\underline{67.53\,€}} \end{aligned}$$

L 2.3 Einblick in die Zinseszinsrechnung

Zu Übung 1 (in Bezug auf Aufgabe 1)

Nein. Im Bankwesen werden Centbeträge nicht mitverzinst.

L 2.4 Berechnen des Kapitalwertes

Zu Übung 1 (in Bezug auf Aufgabe 1)

Kreditsumme: 7612.50 €

L 2.5 Berechnen der Zeitspanne

Zu Übung 1 (in Bezug auf Aufgabe 1)

Die Rechnung wurde um 21 Tage überzogen.