Schulbibliothek

Eine Schüler– und Lehrerhandreichung aus dem Math-College® zur Einführung in die Differenzialrechnung unter Anwendung eines Computeralgebrasystems

Eine Einführung in das Tangentenproblem mit dem Voyage™ 200

Frank Schumann

www.math-college-shop.de

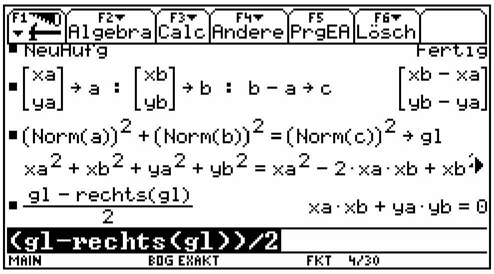
2 Das Skalarprodukt von Vektoren

Kopiervorlage von Frank Schumann und Roland Westphal

Lernauftrag 1

Für das Dreieck ABC ist folgende CAS-Applikation angelegt worden.

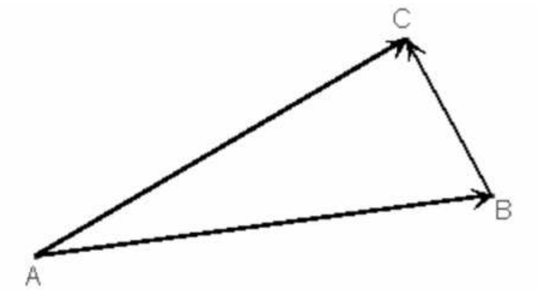
HOME/



[B 2.1]

a) Interpretieren Sie die symbolischen Ausgaben.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$ durch die beiden Vektoren $a := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt wird. Welchen Winkel schließen dabei a und b ein?



[B 2.2]

Definitionen:

$$a := \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$

$$b := \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$c := \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Gleichungen:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$b = c + a$$

$$c = b - a$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$$

Ohne Beweis teilen wir mit:

Satz 1 (Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$)
Zwei Vektoren $a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ stehen genau dann orthogonal (senkrecht aufeinander), wenn die Gleichung $x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$ erfüllt ist.

Kurz: $a \perp b \Leftrightarrow x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$

Beispiele

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 15 \\ -10 \end{pmatrix}$ sind ein Paar senkrechter Vektoren, denn es gilt: $2 \cdot 15 + 3 \cdot (-10) = 0$.

b) Aus der Gleichung $-1 - x = 0$ folgt für die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $x = -1$ die Eigenschaft der Orthogonalität. Die Vektoren stehen also senkrecht aufeinander.

c) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ stehen nicht senkrecht aufeinander, denn die Gleichung $9 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 0$ ist eine falsche Aussage.

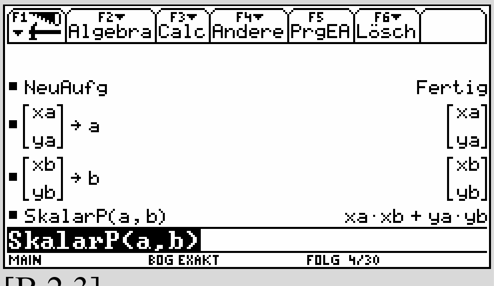
Bemerkungen
Die linke Seite der Gleichung $x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$ beschreibt einen Term, dessen Wert das Ergebnis einer speziellen Verknüpfung der Vektoren $a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ darstellt, das so genannte Skalarprodukt aus zwei Vektoren.

Beispiel: Das Skalarprodukt der Vektoren $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist gleich der Zahl 45 ($9 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 45$).

Wir halten diese besondere Verknüpfung zweier Vektoren in einer Definition fest und wenden uns anschließend einigen wichtigen Eigenschaften zu.

Definition des Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$:
$a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ seien zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$. Das Skalarprodukt aus a und b, abgekürzt mit $\text{SkalarP}(a,b)$, ist gleich der reellen Zahl $x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

HOME/



[B 2.3]

Achtung! Das Skalarprodukt zweier Vektoren darf nicht mit der S-Multiplikation verwechselt werden.

S-Multiplikation	**Skalarprodukt**
$3\cdot\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\30\end{pmatrix}$	$\text{SkalarP}\left(\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)=8\cdot 2+10\cdot 3=46$
… verknüpft eine Zahl mit einem Vektor	… verknüpft zwei Vektoren
Ergebnis: **Vektor**	Ergebnis: **Zahl**

Für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ gilt:

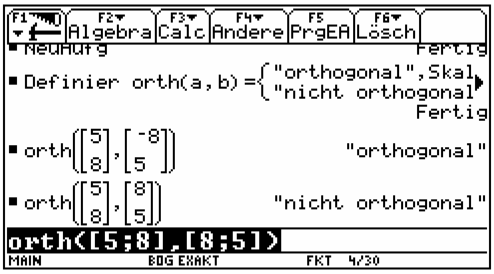
$$\text{SkalarP}(a,b)=0 \;\Leftrightarrow\; a \text{ und } b \text{ sind orthogonal.} \qquad (1)$$

$$\text{SkalarP}(a,b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a=\vec{0} & \text{oder} & b=\vec{0}) \\ & \text{oder} & \\ (a\neq\vec{0}, b\neq\vec{0} & \text{und} & \sphericalangle(a,b)=90°) \end{cases}$$

Wir gestalten eine CAS-Applikation, um mit dieser rechnergestützt die Orthogonalität zweier Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ in Spaltenform schnell und einfach überprüfen zu können. Hilfreich hierbei ist der When-Befehl.

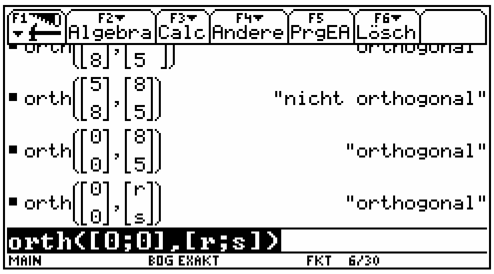
Definier orth(a,b)=when(SkalarP(a,b)=0, "orthogonal", "nicht orthogonal")

HOME/



[B 2.4]

HOME/



[B 2.5]

Interpretationen:

Das Vektorpaar $\left(\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8\\5\end{pmatrix}\right)$ hat eine orthogonale Beziehung.

Das Vektorpaar $\left(\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}\right)$ hat eine keine orthogonale Beziehung.

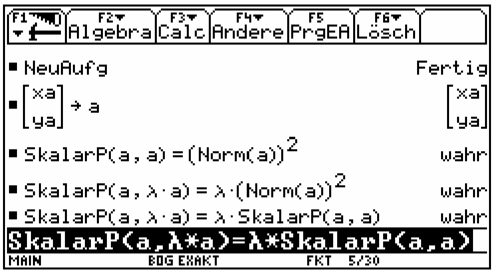
Interpretation:

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist zu jedem beliebigen Vektor aus $\mathbb{R}^2$ orthogonal.

Lernauftrag 2

Interpretieren Sie die symbolischen Ausgaben der nebenstehenden abgebildeten CAS-Applikation. Begründen Sie Ihre Interpretationen.

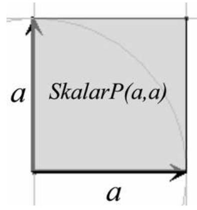
HOME/



[B 2.6]

Wir interpretieren die Ausgabe:

$$\operatorname{SkalarP}(a,a) = (\operatorname{Norm}(a))^2 \qquad (2)$$



[B 2.7]

Für alle $a \in \mathbb{R}^2$ gilt: Das Skalarprodukt aus dem Vektor a und demselbigen ist gleich der Maßzahl des Flächeninhalts des Quadrates, welches über dem Vektor a aufgespannt wird.

Wir interpretieren die Ausgabe:

$$\operatorname{SkalarP}(a,\lambda\cdot a) = \lambda\cdot(\operatorname{Norm}(a))^2 \qquad (3)$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}^2$ gilt: Das Skalarprodukt aus dem Vektor a und dem kollinearen Vektor $\lambda\cdot a$ ist gleich dem λ-fachen des Quadrates der Norm von a.

Aus (1) und (2) folgern wir:

$$\operatorname{SkalarP}(a,\lambda\cdot a) = \lambda\cdot\operatorname{SkalarP}(a,a) \qquad (4)$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}^2$ gilt: Das Skalarprodukt aus dem Vektor a und dem kollinearen Vektor $\lambda\cdot a$ ist gleich dem λ-fachen des Skalarprodukts aus dem Vektor a und a.

Beweis zu (2):

Für den Vektor $a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}; x_a \in \mathbb{R}, y_a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{SkalarP}(a,a) &= x_a\cdot x_a + y_a\cdot y_a \\ &= {x_a}^2 + {y_a}^2 \\ &= (\operatorname{Norm}(a))^2 \end{aligned}$$

was zu beweisen war

Beweis zu (3) und (4):

Für den Vektor $a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$; $x_a \in \mathbb{R}, y_a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{SkalarP}(a, \lambda \cdot a) &= \lambda \cdot x_a{}^2 + \lambda \cdot y_a{}^2 \\ &= \lambda \cdot \left(x_a{}^2 + y_a{}^2\right) \\ &= \lambda \cdot \left(\text{Norm}(a)\right)^2 \\ &= \lambda \cdot \text{SkalarP}(a, a) \end{aligned}$$

was zu beweisen war

Lernauftrag 3

Beweisen Sie Aussagen (5a, b).

Für alle $a \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &\text{SkalarP}(a,a) \geq 0; \\ &\text{SkalarP}(a,a) = 0 \text{ nur für } a = \vec{0} \end{aligned} \qquad \text{(5a,b)}$$

Lernauftrag 4

Belegen Sie durch zwei Zahlenbeispiele für $a \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq \vec{0}$, dass die Gleichung $\text{Skalar}(a, x) = r$ mit $r \in \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^2$ nicht eindeutig lösbar ist.

Lernauftrag 5

Versuchen Sie zu dem Skalarprodukt eine passende Umkehroperation, die „Skalardivision durch $a \in \mathbb{R}^2$“ zu definieren. Welches Problem tritt dabei auf?

3 Mein-Aussagen – 2. Teil

(Fortsetzung des Beitrages von Frau Dr. Ingeborg Löffler aus Ausgabe 01/05)

3.1 Die drei Ebenen eines mathematischen Satzes

Bei den Übungen in den Mein-Aussagen haben wir uns bisher auf die Informationen der quantitativen Ebene konzentriert. Hier noch einmal wichtige Formulierungshinweise für diese spezielle Art der Information:

- „für alle…“,
- „es gibt ein…“,
- „für jedes beliebige…“,
- „für höchstens ein…“,
- „für mindestens ein…“,