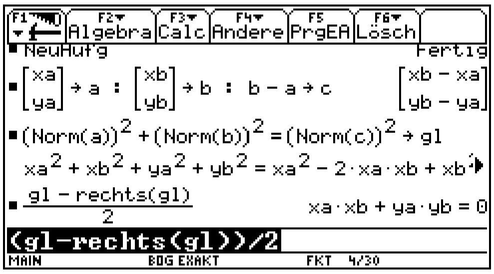
Das Skalarprodukt von Vektoren

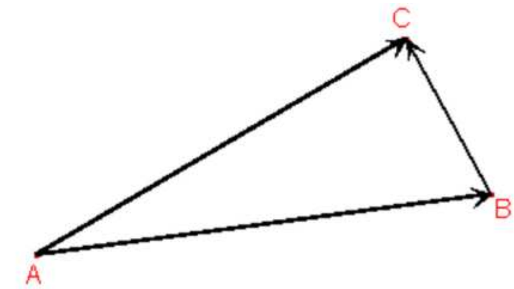
Lern**auftrag** 1

Für das Dreieck ABC ist folgende CAS-Applikation angelegt worden.

HOME/



[Abb. 1]



[Abb. 2]

a) Interpretieren Sie die symbolischen Ausgaben.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung in b) durch die beiden Vektoren $a := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt wird. Welchen Winkel schließen a und b ein?

Definitionen:

$$a := \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$

$$b := \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$c := \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Gleichungen:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$b = c + a$$

$$c = b - a$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$$

Satz 1 (Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$)

Zwei Vektoren $a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ stehen *genau dann* orthogonal (senkrecht aufeinander), *wenn* die Gleichung $x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$ erfüllt ist.

Kurz: $a \perp b \Leftrightarrow x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$

Beispiele

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 15 \\ -10 \end{pmatrix}$ sind ein Paar senkrechter (orthogonaler) Vektoren, denn es gilt: $2 \cdot 15 + 3 \cdot (-10) = 0$.

b) Aus der Gleichung $-1 - x = 0$ folgt für die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $x = -1$ die Eigenschaft der Orthogonalität.

c) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ stehen nicht senkrecht (nicht orthogonal) aufeinander, denn die Gleichung $9 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 0$ ist eine falsche Aussage.

Bemerkungen

Die rechte Seite der Gleichung $x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$ beschreibt einen Term, dessen Wert das Ergebnis einer speziellen Verknüpfung aus den Vektoren $a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ darstellt, das so genannte Skalarprodukt aus zwei Vektoren.

Beispiel: Das Skalarprodukt aus den Vektoren $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist gleich der Zahl 45 ($45 = 9 \cdot 5 + 5 \cdot 0$).

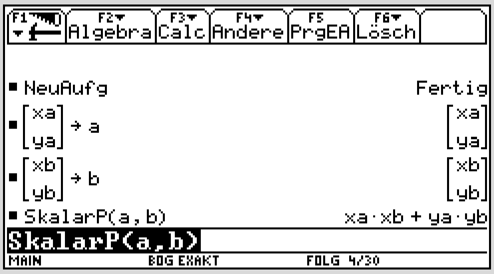
Wir halten diese besondere Verknüpfung zweier Vektoren in einer Definition fest und wenden uns anschließend einigen wichtigen Eigenschaften zu.

Definition der skalaren Multiplikation in $\mathbb{R}^2$:

$a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ seien zwei Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^2$.

Das Skalarprodukt aus a und b, abgekürzt mit $\mathrm{SkalarP}(a,b)$, ist gleich der reellen Zahl $x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

HOME/



[Abb. 3]

***Achtung!** Das Skalarprodukt zweier Vektoren darf nicht mit der S-Multiplikation verwechselt werden.*

S-Multiplikation	**Skalarprodukt**
$3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \end{pmatrix}$	$\mathrm{SkalarP}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 46$
… verknüpft eine Zahl mit einem Vektor	… verknüpft zwei Vektoren
Ergebnis: Vektor	Ergebnis: Zahl

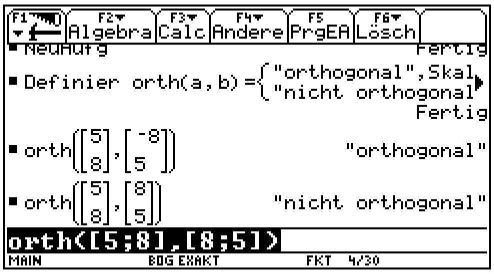
$\boxed{\mathrm{SkalarP}(a,b) = 0 \ \Leftrightarrow\ a \text{ und } b \text{ sind orthogonal.}}$ (1)

$$\mathrm{SkalarP}(a,b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a = \vec{0} \quad \text{oder} \quad b = \vec{0}) \\ \qquad \text{oder} \\ (a \neq \vec{0}, b \neq \vec{0} \quad \text{und} \quad \sphericalangle(a,b) = 90°) \end{cases}$$

Wir gestalten eine CAS-Applikation, um mit dieser rechnergestützt die Orthogonalität zweier Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ in Spaltenform schnell und einfach überprüfen zu können. Hilfreich hierbei ist der When-Befehl.

$\boxed{\text{Definier orth}(a,b) = \text{when}(\text{SkalarP}(a,b)=0, \text{"orthogonal", "nicht orthogonal"})}$

HOME/



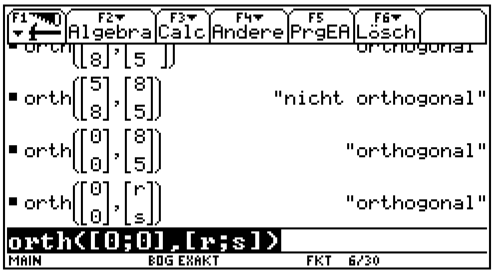
[Abb. 4]

Interpretationen:

Das Vektorpaar $\left(\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8\\5\end{pmatrix}\right)$ hat eine orthogonale Beziehung.

Das Vektorpaar $\left(\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}\right)$ hat keine orthogonale Beziehung.

HOME/



[Abb. 5]

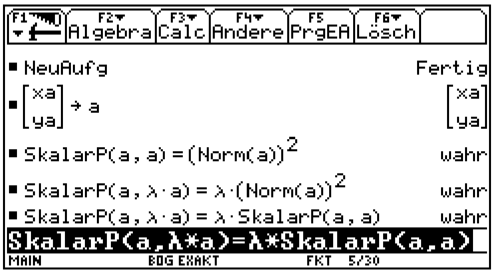
Interpretation:

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist zu jedem beliebigen Vektor aus $\mathbb{R}^2$ orthogonal.

Lern**auftrag** 2

Interpretieren Sie die symbolischen Ausgaben der nebenstehenden abgebildeten CAS-Applikation. Begründen Sie Ihre Interpretationen.

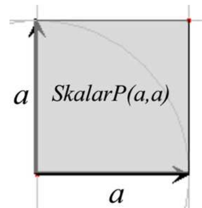
HOME/



[Abb. 6]

Wir interpretieren die Ausgabe: $\boxed{\text{SkalarP}(a,a) = (\text{Norm}(a))^2}$ (2)

Für alle $a \in \mathbb{R}^2$ gilt: Das Skalarprodukt aus dem Vektor a und demselbigen ist gleich der Maßzahl des Flächeninhalts des Quadrates, welches über dem Vektor a aufgespannt wird.



[Abb. 7]

Wir interpretieren die Ausgabe: $\boxed{\text{SkalarP}(a,\lambda\cdot a) = \lambda\cdot(\text{Norm}(a))^2}$

(3)

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}^2$ gilt: Das Skalarprodukt aus dem Vektor a und dem kollinearen Vektor $\lambda\cdot a$ ist gleich dem λ-fachen des Quadrates der Norm von a.

Aus (1) und (2) folgern wir: $\boxed{\text{SkalarP}(a,\lambda\cdot a) = \lambda\cdot\text{SkalarP}(a,a)}$

(4).

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}^2$ gilt: Das Skalarprodukt aus dem Vektor a und dem kollinearen Vektor $\lambda\cdot a$ ist gleich dem λ-fachen des Skalarprodukts aus dem Vektor a und a.

Wir beweisen die Gleichung (2). Dazu notieren wir a als Spaltenvektor.

$$a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix};\ x_a \in \mathbb{R}, y_a \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{SkalarP}(a,a) &= x_a \cdot x_a + y_a \cdot y_a \\ &= {x_a}^2 + {y_a}^2 \\ &= (\text{Norm}(a))^2 \end{aligned}$$

was zu beweisen war

Wir beweisen die Gleichungen (3) und (4).
Behauptung: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\text{SkalarP}(a, \lambda \cdot a) = \lambda \cdot \text{SkalarP}(a,a)$.
Dazu notieren wir wieder a als Spaltenvektor.

$$\begin{aligned} \text{SkalarP}(a, \lambda \cdot a) &= \lambda \cdot {x_a}^2 + \lambda \cdot {y_a}^2 \\ &= \lambda \cdot \left({x_a}^2 + {y_a}^2\right) \\ &= \lambda \cdot (\text{Norm}(a))^2 \\ &= \lambda \cdot \text{SkalarP}(a,a) \end{aligned}$$

was zu beweisen war

Lern**auftrag** 3

Beweisen Sie nachfolgende Aussage.
Für alle $a \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{SkalarP}(a,a) \geq 0; \\ &\text{SkalarP}(a,a) = 0 \text{ nur für } a = \vec{0} \end{aligned}}$$

(5).

Lern**auftrag** 4

Belegen Sie durch zwei Zahlenbeispiele für $a \in \mathbb{R}^2, a \neq \vec{0}$, dass die Gleichung $\text{Skalar}(a,x) = r$ mit $r \in \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^2$ nicht eindeutig lösbar ist.

Lern**auftrag** 5

Versuchen Sie zu dem Skalarprodukt eine passende Umkehroperation, die „Skalardivision durch $a \in \mathbb{R}^2$" zu definieren. Welches Problem tritt dabei auf?