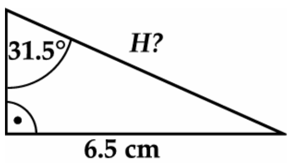
Der einfache Taschenrechner

Wir sind zu Gast in einer Privatstunde im Fach Mathematik, Klassenstufe 11. Anwesende sind Herr Rainer Müller-Herbst, Lehrer für Mathematik und Physik und der Schüler Kai Sperling.
Herr Rainer Müller-Herbst wird im laufenden Text abgekürzt mit RMH und Schüler Kai Sperling mit Kai.
Herr RMH wiederholt mit Kai Grundaufgaben zur Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck.

RMH Bevor du dich mit dem neuen Lesetext auseinander setzt, stelle ich dir eine einfache Aufgabe zur Dreiecksberechnung.
Aufgabe: Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck. Wie lang ist die Hypotenuse, wenn eine Seite von 6.5 cm Länge dem Innenwinkel von 31.5° gegenüberliegt?

Kai Ich denke die Aufgabe ist wirklich einfach. Also mach ich erst einmal eine Skizze vom Ganzen.



$$\sin(31.5°) = \frac{GK}{H}.$$

Nach der Länge von H wird gefragt, also $H = 6.5cm / \sin(31.5°)$.

Kai sucht nach seinem Taschenrechner. Er weiß ganz genau, dass er ihn dabei hat. Was Kai nicht weiß ist, dass sein Lehrer heimlich die Batterien aus Kais Rechner entnommen hat. Kai findet seinen Rechner und will loslegen.

Kai Mein Rechner will heute nicht so richtig anspringen.

RMH Warte, kein Problem. Nimm diesen Taschenrechner.

Kai Mit dem kann ich aber das Dreieck nicht ausrechnen.

RMH Mit dem einfachen Rechner kannst du das nicht?

Kai Da fehlt doch die Sinustaste und ohne die geht es nicht.

RMH Gib mir den Rechner. Ich will mal nicht so sein.

Herr RMH rechnet mit einem sehr einfachen Taschenrechner, der wirklich keine Sinustaste hat. Dieser verfügt nur über eine Plus-, eine Minus-, eine Mal- und eine Divisionstaste als Rechentasten.

RMH Ich rechne dir ausnahmsweise den Wert von $\sin(31.5°)$ aus. Den Rest der Lösung bestimmst du aber. Mein Taschenrechner zeigt an: 0.522672492.

Kai Und der Wert stimmt auch? Wie haben Sie denn das gemacht? Das geht doch niemals mit so einem Rechner. Oder kennen Sie bereits die Lösung? Mit so einem einfachen Ding geht das nämlich überhaupt nicht.

RMH Du glaubst mir nicht? Rechne erst mal dein Dreieck fertig aus.

Kai sieht seinen Lehrer mit einem fragenden Blick an und rechnet mit dem „einfachen Ding“ weiter.

Kai H ist dann 12.4 cm lang.

In der Zwischenzeit hat Herr RMH die Batterien in Kais Rechner wieder eingelegt. Kai bekommt diese Aktion auch mit.

Kai Was machen Sie denn da? Jetzt weiß ich, warum ich vorhin meinen Rechner nicht zum Laufen brachte. Moment mal, ich muss alles noch mal nachrechnen.

Kai nimmt seinen Rechner und berechnet den Sinuswert von 31.5°, diesmal aber über die Sinustaste. Und auch die Länge der Hypotenuse rechnet er nach.

Kai Na ja! Mein Sinuswert ist aber ein bisschen genauer als Ihrer. Der

Sinus von 31.5° ist nämlich 0.522498565. Moment bitte, da habe ich auch gleich den richtigen Wert für die Hypotenuse. Sie ist 12.4 cm.

RMH Ein sehr großer Unterschied zu deinem vorherigen Ergebnis (ironische Stimme und Mimik).

Kai Ich musste ja auch auf eine Stelle nach dem Dezimalpunkt runden. Deshalb ist das noch gleich. Ansonsten ist trotzdem Ihr Sinuswert nur fast richtig.

RMH Stimmt. Aber immerhin.

Kai Sagen Sie mal, welchen Trick haben Sie da vorhin angewendet?

RMH Keinen Trick. Ich habe eine nützliche Formel benutzt. Mit der habe ich den Sinus von 31.5° ausgerechnet. Willst du sie mal sehen?

Kai Ja, natürlich. Und mit der geht das? Sieht schon eigenartig aus. Aber wirklich nur Plus, Mal und die anderen einfachen Rechenarten - nicht schlecht diese Formel.

Wie sieht diese Formel aus?

1 Ersatzterme für sin(α)

Wie berechnet man mit einem einfachen Taschenrechner Sinuswerte, wie zum Beispiel $\sin(31.5°)$? Der Taschenrechner verfügt lediglich über Rechentasten für die Grundrechenarten, das Potenzieren und das Wurzelziehen. Dieser Rechner hat keine Sinus- oder Kosinustaste. Außerdem besitzt er numerische Speicher. Im weiteren interessiert uns dabei, wie gut sind die so erzeugten Näherungswerte im Vergleich zu denjenigen, die mit einer üblichen Sinustaste erzeugt werden können.

Auftrag 1.1

Gegeben sind zwei Terme:

(I) $x^3 - \frac{\pi \cdot x^2}{2} + \frac{\pi^2 \cdot x}{12} - \frac{\pi^3}{216} + \frac{1}{2}$

(II) $\frac{-(6 \cdot x - \pi)^2}{144} + \frac{\sqrt{3} \cdot (6 \cdot x - \pi)}{12} + \frac{1}{2}$

a) Wandeln Sie das Winkelmaß von 31.5° in das Bogenmaß um und ordnen Sie den exakten Wert dem symbolischen Bezeichner b zu.

b) Berechnen Sie an der Stelle $x = b$ die numerischen Werte der Terme I und II.

c) Welche verschiedenartigen Rechenoperationen benutzen Sie bei den Termwertberechnungen in Auftrag 1.1 b)?

d) Bestimmen Sie mithilfe der Sinustaste den numerischen Wert von $\sin(b)$.

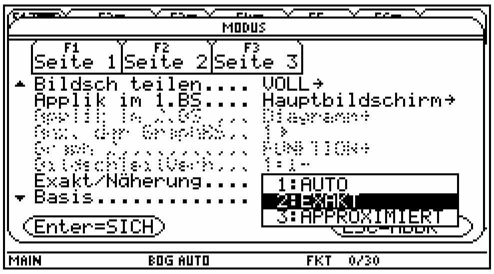
e) Welcher Term liefert den genaueren Näherungswert für $\sin(b)$? Begründen Sie numerisch.

Lösung 1.1 a)

Für eine symbolische Ausgabe stellen wir im MODE-Menü ein:

MODE/F2/Exakt/Näherung/

[B 1.1]



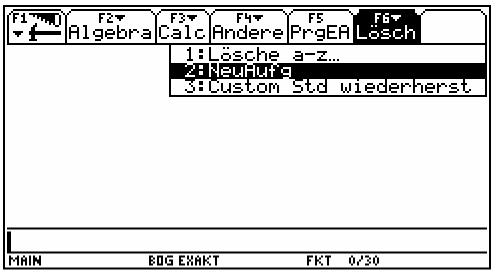
[B 1.2]

MODE/F2/Exakt/Näherung/Exakt

[B 1.3]

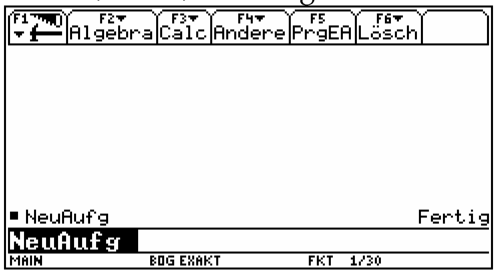
Wir setzen alle Variablen von a bis z auf ihren symbolischen Namen zurück, machen sie damit wertfrei und löschen zugleich den Bildschirm.

HOME/Lösch/



[B 1.4]

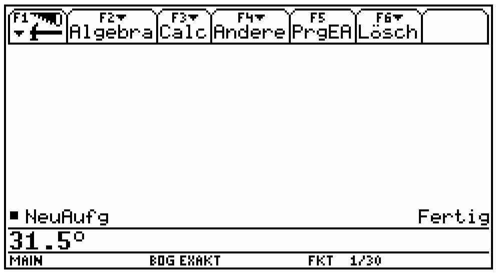
HOME/Lösch/NeuAufg



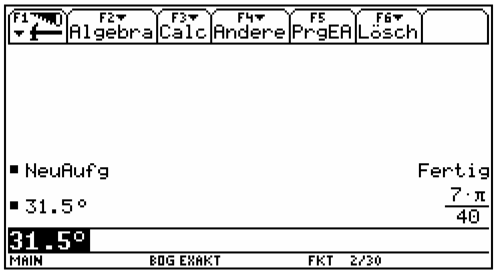
[B 1.5]

Um das Bogenmaß von 31.5° zu berechnen, tragen wir im HOME-Fenster das Winkelmaß von 31.5° ein.

HOME/

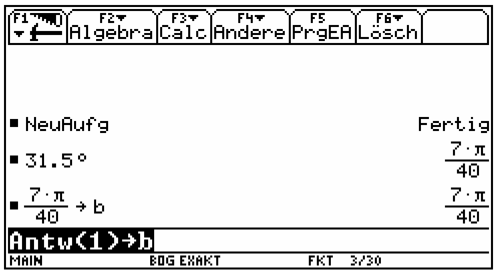


[B 1.6]



[B 1.7]

Wir drücken: STO▸ B ENTER.

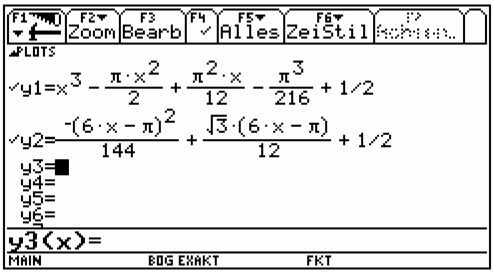


[B 1.8]

Lösung 1.1 b)

Für die Termwertberechnungen legen wir uns eine grafisch-numerische Applikation an. Darin definieren wir die Terme I und II und ordnen sie den vorgegebenen Bezeichnern y_1 bzw. y_2 zu.

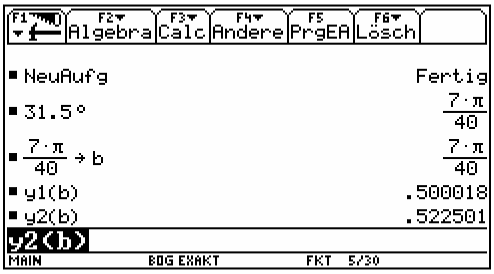
Y=Editor/



[B 1.9]

Nun führen wir im HOME-Fenster die numerischen Termwertberechnungen mittels der APPROX$\approx$-Funktion aus.

HOME/

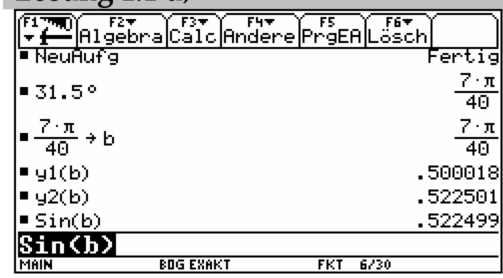


[B 1.10]

Lösung 1.1 c)

Für die beiden Termwertberechnungen im Auftrag 1.1 b) benutzen wir die Tasten [+], [−], [×], [÷], [^] und [√]. Diese entsprechen den vier Grundrechenarten, dem Potenzieren und dem Quadratwurzelziehen.

Lösung 1.1 d)



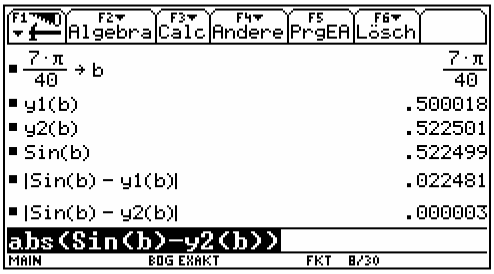
[B 1.11]

Lösung 1.1 e)

Um entscheiden zu können, welcher der beiden Ersatzterme den besseren Näherungswert für $\sin(b)$ liefert, bestimmen wir numerisch die absoluten Fehler:

$$|\sin(b) - y_1(b)| \text{ und}$$

$$|\sin(b) - y_2(b)|.$$



[B 1.12]

Der Term $y_2(x)$ liefert an der Stelle b einen genaueren Wert als der Term $y_1(x)$, denn $0.000003 < 0.022481$.

Übung 1.1

Für die näherungsweise Berechnung von $\sin(31.5°)$ sind zwei Terme gegeben:

(I) $$\frac{\sqrt{3}\cdot(6\cdot x-\pi)}{12}+\frac{1}{2}$$

(II) $$-(x-\frac{\pi}{6})^2+0.5\,.$$

Welchen der beiden Terme würden Sie für die numerische Berechnung von $\sin(31.5°)$ benutzen, wenn Sie mit dem oben genannten einfachen Taschenrechner arbeiten müssten? Entscheiden und begründen Sie.

Lösung: Term I

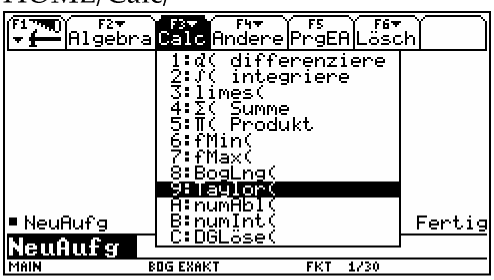
2 Der Taylorbefehl

Unser Rechner verfügt über einen Befehl, namens Taylor. Mit dessen Hilfe kann man für vorgegebene Funktionen unter gewissen Voraussetzungen Ersatzterme in Form von Polynomen erzeugen. Der Vorteil eines Polynoms wird durch die darin enthaltenen Grundrechenoperationen ($\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$) deutlich.
Diese Ersatzterme gestatten es, mithilfe eines einfachen Taschenrechners, welcher über Tasten für elementare Rechenoperationen als auch Tasten für das Potenzieren und Wurzelziehen verfügt, Termwerte, wie zum Beispiel $\ln(15)$ oder $\cos(\pi/10)$ in guter Näherung zu berechnen.
Für eine neue CAS-Applikation führen wir als Erstes eine HOME-Bereinigung durch:

- MODE/$\boxed{\text{F2}}$/Exakt/Näherung/Exakt und
- HOME/Lösch/NeuAufg.

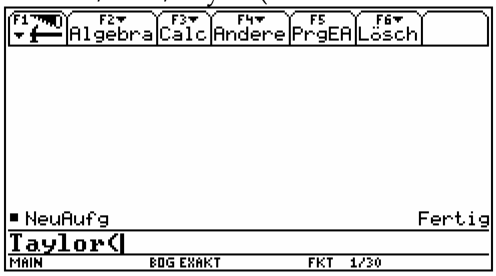
Vergleichen Sie mit den Bildern [B 1.1] bis [B 1.5].
Um einen geeigneten Ersatzterm für $\sin(31.5°)$ zu finden, wählen wir aus dem HOME/Calc/-Menü den Funktionsnamen Taylor aus und belegen diesen mit vier Argumenten in angegebener Reihenfolge.

HOME/Calc/

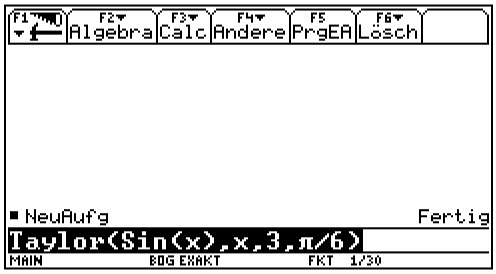


[B 2.1]

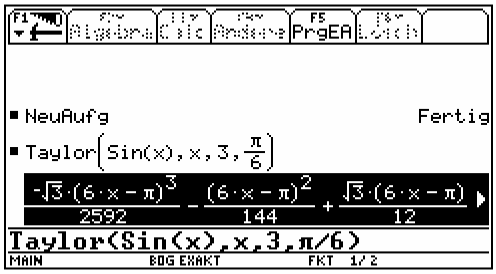
HOME/Calc/Taylor(



[B 2.2]



[B 2.3]



[B 2.4]

Interpretation: Dieser Taylorbefehl ordnet dem Term $\sin(x)$ in Abhängigkeit der Variablen x ein Polynom vom Grad 3 in der Entwicklungsstelle $\pi/6$ zu.

$$\frac{-\sqrt{3}(6x-\pi)^3}{2592}-\frac{(6x-\pi)^2}{144}+\frac{\sqrt{3}(6x-\pi)}{12}+\frac{1}{2}$$

Vergleicht man dieses Polynom mit dem Zweiten aus Auftrag 1.1, so erkennt man drei gemeinsame Summanden. Neu hinzugekommen ist lediglich der Term:

$$\frac{-\sqrt{3}(6x-\pi)^3}{2592}.$$

Auftrag 2.1

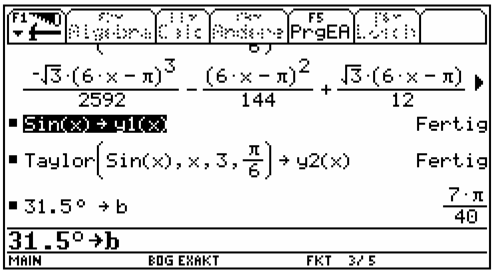
a) Untersuchen Sie, welche Auswirkung der neu hinzugekommene Summand auf die numerische Ersatzrechnung hat.

b) Editieren Sie den Taylorbefehl im dritten Argument. Setzen Sie hier den höchsten Grad auf die Zahl 5. Bewerten Sie durch Vergleich mit bereits erzeugten Ersatztermen, wie gut dieses neue Polynom für die numerische Berechnung von sin(31.5°) ist.

c) Veranschaulichen Sie am Rechner die Termwertbeziehungen der beiden Ersatzrechnungen.

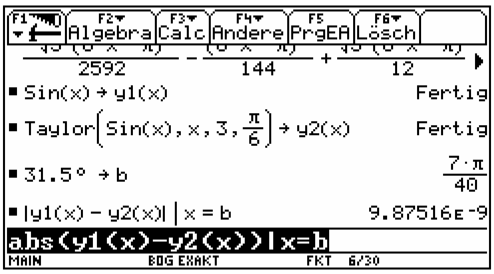
Lösung 2.1 a)

Wir setzen die bereits begonnene CAS-Applikation im HOME-Fenster fort, indem wir die drei Bezeichner $y_1(x)$, $y_2(x)$, b per Datenspeicherung einführen.



[B 2.5]

Um die Auswirkung des neu hinzugekommenen Summanden auf die numerische Ersatzrechnung bewerten zu können, berechnen wir approximativ den absoluten Fehler aus den Termen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ an der Stelle b.



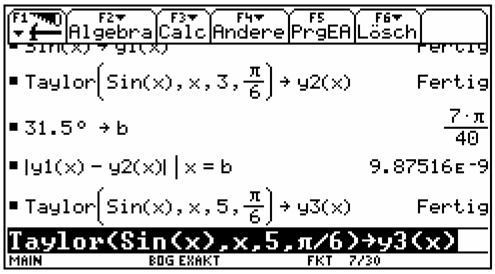
[B 2.6]

Interpretation: Der absolute Fehler für den Ersatzterm $y_2(x)$ an der Stelle b beträgt $9.88 \cdot 10^{-9}$.

Dieser absolute Fehler ist ein Maß für die Güte der Ersatzrechnung. Je kleiner der absolute Fehler ist, desto genauer ist die Wertberechnung an der vorgegebenen Stelle über den jeweiligen Ersatzterm.

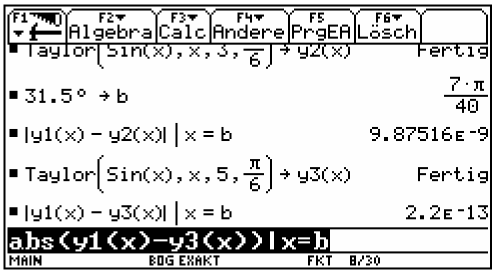
Lösung 2.1 b)

Wir erweitern unsere CAS-Applikation und rufen den letzten Taylorbefehl in die Schreibzeile zurück, um das darin enthaltene dritte Argument zu editieren. In diesem Zug der Neubelegung führen wir auch den Bezeichner $y_3(x)$ ein.



[B 2.7]

Wir berechnen den absoluten Fehler aus den Termen $y_1(x)$ und $y_3(x)$ an der Stelle b.



[B 2.8]

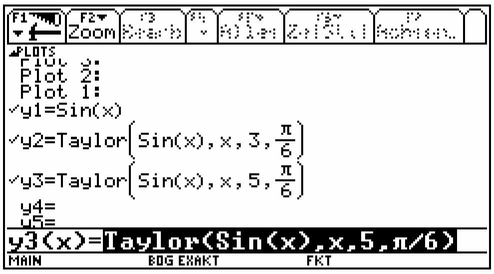
Interpretation: Der absolute Fehler für den Ersatzterm $y_3(x)$ an der Stelle b beträgt $2.2 \cdot 10^{-13}$.

Folgerung: Der Ersatzterm, der unter dem Bezeichner $y_3(x)$ abgespeichert wurde, liefert von allen bisherigen Ersatztermen den genauesten Näherungswert für $\sin(31.5°)$.

Lösung 2.1 c)

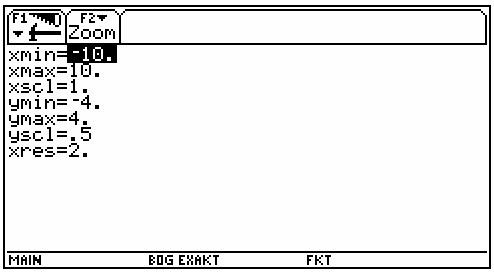
Wir veranschaulichen die Termwertbeziehungen der beiden Ersatzrechnungen in einer grafisch-numerischen Applikation.

Y=Editor/



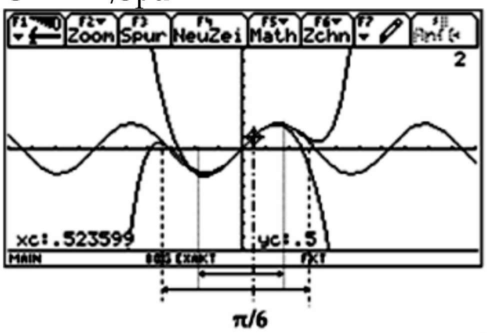
[B 2.9]

WINDOW/



[B 2.10]

GRAPH/Spur



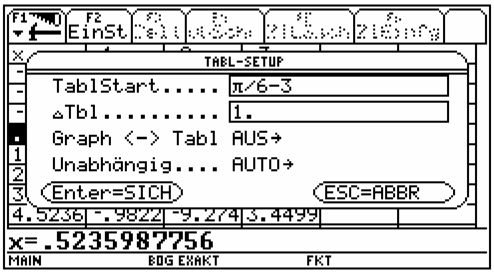
(Grafische Aufbereitung)

[B 2.11]

Interpretation: Die beiden Taylorgrafen von $y_2(x)$ und $y_3(x)$ „schmiegen" sich in einer Umgebung der Zahl $\pi/6$ in unterschiedlichen Intervallbreiten an den Grafen des Sinusterms an, wobei der Graf des Taylorpolynoms $y_3(x)$ mit der Ordnung 5 (drittes Argument) eine entsprechend längere Intervallbreite hat als der Graf des Taylorpolynoms $y_2(x)$ mit der Ordnung 3.

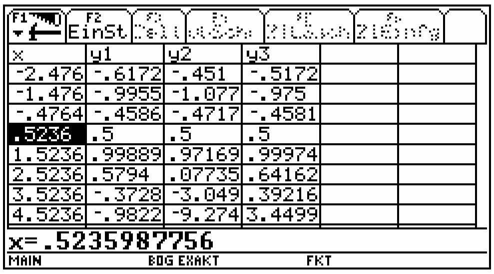
Für weitere Veranschaulichungen streben wir auch eine tabellarische Auswertung um die Zahl $\pi/6$ an.

TBLSET/



[B 2.12]

TABLE/



x	y1	y2	y3
-2.476	-.6172	-.451	-.5172
-1.476	-.9955	-1.077	-.975
-.4764	-.4586	-.4717	-.4581
.5236	.5	.5	.5
1.5236	.99889	.97169	.99974
2.5236	.5794	.07735	.64162
3.5236	-.3728	-3.049	.39216
4.5236	-.9822	-9.274	3.4499

x=.5235987756

[B 2.13]

Interpretation: An der Stelle $\pi/6 \approx 0.5236$ (viertes Argument) stimmen die Werte der beiden Ersatzterme $y_2(x)$ und $y_3(x)$ mit dem des Sinusterms (Ausgangsterm) numerisch bestens überein. Der gemeinsame Termwert ist in sehr guter Näherung 0.5.

In unmittelbarer Umgebung von $\pi/6 \approx 0.5236$ stimmen die numerischen Werte der Ersatzterme in sehr guter Näherung mit dem des Ausgangsterms überein. Je weiter man sich nach beiden Seiten von dieser besonderen Stelle $\pi/6$ entfernt, desto schlechter fällt die numerische Übereinstimmung der beteiligten Termwerte aus.

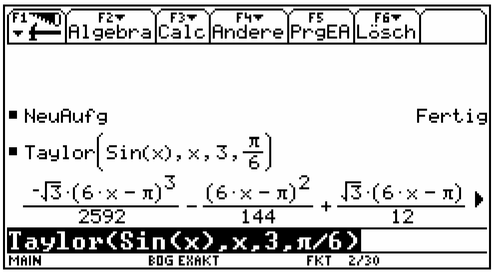
INFO | Taylor und die Syntax

Der Taylorbefehl stellt eine vierstellige Funktion dar, befindet sich im HOME/Calc/-Menü an neunter Position und hat folgende Syntax: $\text{Taylor}(b_1, b_2, b_3, b_4)$.

Argument	Bezeichnung	Beispiel
b_1	Term	$\sin(x)$
b_2	Termvariable	x
b_3	höchster Grad	3
b_4	Entwicklungsstelle	$\pi/6$

Beispiel 2.1:
Ausgangsterm: $\sin(x)$
Erzeugt werden soll zu $\sin(x)$ ein Taylorpolynom höchstens dritten Grades, entwickelt an der Stelle $\pi/6$.

HOME/



[B 2.14]

Interpretation: Der Rechner liefert ein Taylorpolynom dritten Grades:

$$\frac{-\sqrt{3}(6x-\pi)^3}{2592}-\frac{(6x-\pi)^2}{144}+\frac{\sqrt{3}(6x-\pi)}{12}+\frac{1}{2}.$$

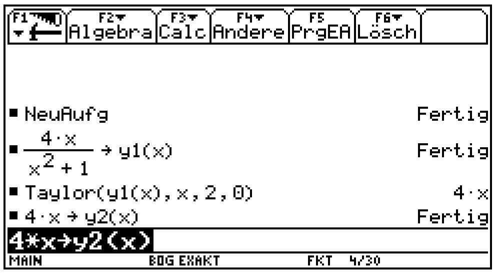
INFO | Taylor und der Ausgangsterm
Mithilfe des Taylorbefehls können zu verschiedenen Ausgangstermen Taylorpolynome erzeugt werden.

Beispiel 2.2:

Ausgangsterm: $\dfrac{4x}{x^2+1} \to y_1(x)$

Erzeugt werden soll zu $y_1(x)$ ein Taylorpolynom höchstens zweiten Grades, entwickelt an der Stelle 0.

HOME/

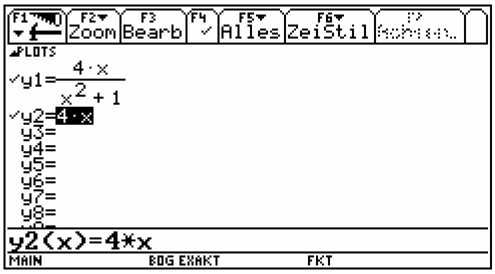


[B 2.15]

Interpretation: Der Rechner liefert ein Taylorpolynom ersten Grades: $4\cdot x$.

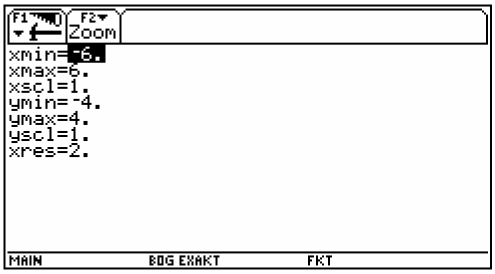
Frage: Warum gibt der Rechner kein Taylorpolynom zweiten Grades aus?
Hinweis: Betrachten Sie die Symmetrie des Sinusgrafen. Welche Folgen hat dies für den Grafen des Ersatzterms?

Y=Editor/



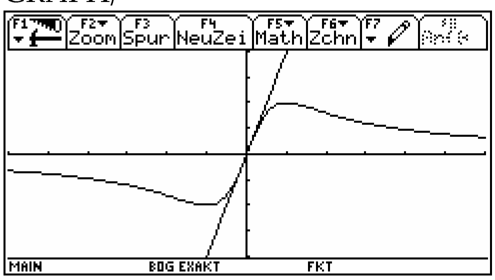
[B 2.16]

WINDOW/



[B 2.17]

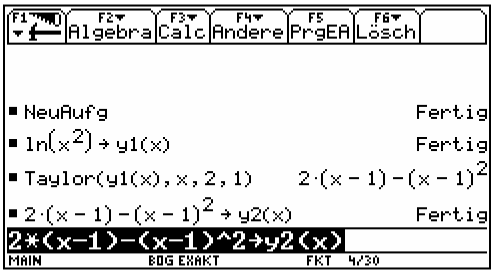
GRAPH/



[B 2.18]

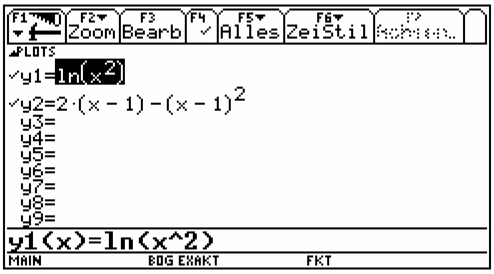
Beispiel 2.3:
Ausgangsterm: $\ln(x^2) \to y_1(x)$
Erzeugt werden soll zu $y_1(x)$ ein Taylorpolynom höchstens zweiten Grades, entwickelt an der Stelle 1.

HOME/



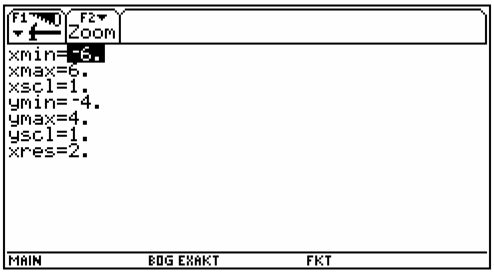
[B 2.19]

Y=Editor/



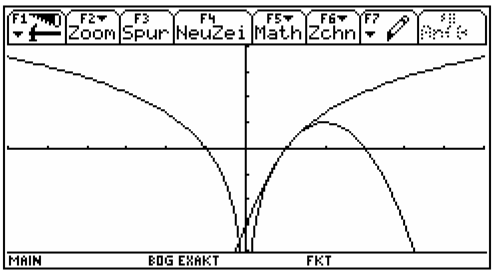
[B 2.20]

WINDOW/



[B 2.21]

GRAPH/



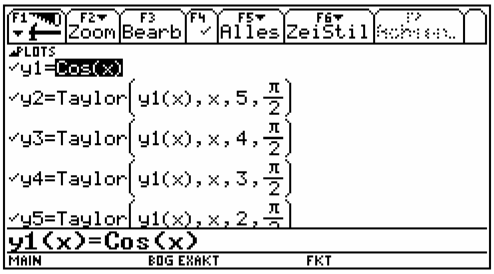
[B 2.22]

Interpretation: Das Taylorpolynom $y_2(x)$ zweiten Grades schmiegt sich in einer Umgebung der Zahl 1 an den Grafen des Terms $y_1(x)$ an.
Unter der Bedingung, dass die Entwicklungsstelle und das Argument nahe beieinander liegen, bezeichnet man die Grafen der Taylorpolynome aufgrund ihres anschmiegsamen Verlaufs oft als Anschmiegparabeln.

INFO | Taylor und die höchste Ordnung
Das dritte Argument der Taylorfunktion ist die Zahl für die höchste Ordnung. Das zugewiesene Taylorpolynom hat dann höchstens diese Zahl als Grad.

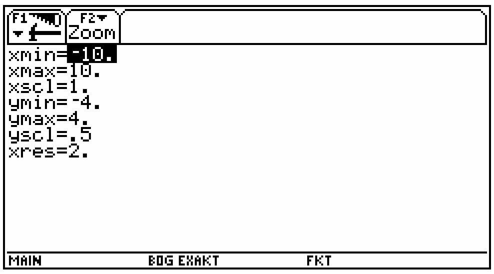
Beispiel 2.4:
Ausgangsterm: $\cos(x) \to y_1(x)$
Ziel: Erzeugt werden soll zu $y_1(x)$ der Graf eines Taylorpolynoms höchstens fünften (vierten, dritten, zweiten) Grades. Die Entwicklungsstelle ist jeweils $\pi/2$.

Y=Editor/



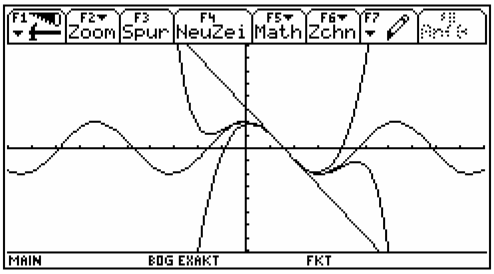
[B 2.23]

WINDOW/



[B 2.24]

GRAPH/



[B 2.25]

Interpretation: Es entstehen effektiv nur drei verschiedene Anschmiegparabeln. Der Grund, dass es nicht vier sind, liegt in dem Umstand, dass der Graf von $\cos(x)$ zum Entwicklungspunkt $\left(\pi/2,0\right)$ punktsymmetrisch ist. Deshalb können nur Polynome mit den Graden 5, 3 und 1 die lokale Approximation erfüllen.
Über die GRAPH/Spur-Funktion lässt sich leicht feststellen, dass bei ein und demselben Ausgangsterm und fester Entwicklungsstelle gilt: Je höher der Grad des gelieferten Taylorpolynoms ist, desto breiter ist die Umgebung der Entwicklungsstelle, die man aufgrund der Anschauung als „Anschmiegbereich" bezeichnen würde. In einer solchen Umgebung findet man jene Argumente, deren Funktionswerte in guter Näherung über das Taylorpolynom berechnet werden können.

Übung 2.1

Testen Sie mit der GRAPH/Spur-Funktion den Zusammenhang zwischen Grad dieses Taylorpolynoms und dem Anschmiegbereich aus. Benutzen Sie dazu jene grafisch-numerische Applikation, die zu Bild [B 2.25] führt.

INFO | Taylor und die Entwicklungsstelle

Das vierte Argument der Taylorfunktion ist die Entwicklungsstelle. Die folgende Übung soll exemplarisch zeigen, welchen Einfluss die Entwicklungsstelle auf die Güte der Annäherung von Termwerten haben kann.

Übung 2.2

Es soll über ein einziges Taylorpolynom dritten Grades eine gute Annäherung an die Werte von $\sin(10°)$, $\sin(15°)$ und $\sin(20°)$ erfolgen. Zur Auswahl stehen die beiden Taylorbefehle:

$Taylor(\sin(x), x, 3, 0)$ und

$Taylor(\sin(x), x, 3, \pi/2)$.

Welcher der beiden Befehle erzeugt das „bessere" Taylorpolynom? Argumentieren Sie anhand einer geeigneten grafisch-numerischen Applikation.
Antwort: $\text{Taylor}(\sin(x), x, 3, 0)$.

Es gilt der allgemeine Zusammenhang: Die Güte der Näherungswerte aus Taylorpolynomen wird u.a. auch durch die Wahl der Entwicklungsstelle (viertes Argument) beeinflusst. Je näher die Berechnungsstelle (Argument) an der Entwicklungsstelle liegt, desto „schneller" erzielt man mit einem Taylorpolynom fester Ordnung eine „gute" Näherung der entsprechenden Funktionswerte. Die beste Annäherung der Funktionswerte liegt dann vor, wenn die Berechnungsstelle mit der Entwicklungsstelle numerisch übereinstimmt. Eine entsprechende analytische Formulierung für diesen Zusammenhang finden wir in dem folgenden Satz.

S a t z **S 01**

Wenn $t(x)$ mit a als Entwicklungsstelle ein Taylorpolynom des Ausgangsterms $f(x)$ ist, dann gilt in einer Umgebung von a: $f(a)=t(a)$ und $\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)-t(x)\right|=0$.

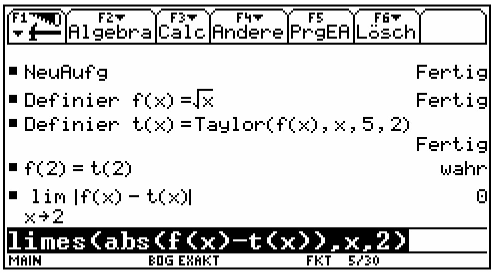
Da uns die Beweismittel für S 01 nicht zur Verfügung stehen, müssen wir leider auf die Beweisführung verzichten. Die beiden folgenden Beispiele demonstrieren die

Gültigkeit dieses Satzes an zwei CAS-Applikationen.

Beispiel 2.5 a):

Ausgangs-term	Entwick-lungsstelle	höchster Grad
$\sqrt{x}$	2	5

HOME/

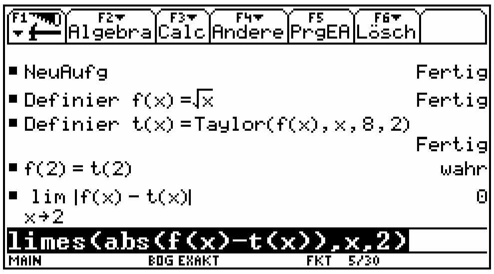


[B 2.26]

Beispiel 2.5 b):

Ausgangs-term	Entwick-lungsstelle	höchster Grad
$\sqrt{x}$	2	8

HOME/



[B 2.27]

Übung 2.3

Testen Sie den Satz S 01 am Rechner und halten Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle schriftlich fest.

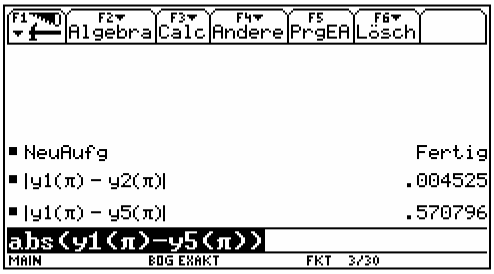
INFO | Guter Näherungswert

Immer wieder erhebt man bei der approximativen Beschreibung von Funktionswerten den Anspruch auf „gute“ Näherungswerte. Was versteht man unter „guten“ Näherungswerten? Gibt es vielleicht auch „beste“ Näherungswerte?

Wählt man beispielsweise die Zahl s mit $s := 0.5$, so kann man mit dieser Zahl eine Klasseneinteilung vornehmen. Je nachdem, ob der absolute Fehler eines bestimmten Ersatzterms die Zahl s unterschreitet oder nicht, unterteilt man in „gute“ oder „schlechte“ Näherungswerte.
Im Anschluss an Bild [B 2.23] gilt beispielsweise: Der Ersatzterm $y_2(x)$ für $y_1(x) := \sin(x)$ erzeugt in π einen „guten“ Näherungswert. Dagegen der lineare Term $y_5(x)$ an gleicher Stelle einen „schlechten“ Näherungswert. Bildet man den absoluten Fehler zwischen dem Ausgangsterm und dem jeweiligen Ersatzterm und wertet dann approximativ aus, so gilt:

$$|y_1(\pi) - y_2(\pi)| < s \text{ und}$$
$$|y_1(\pi) - y_5(\pi)| > s\,.$$

HOME/



[B 2.28]

Definition **D 01**

$f(x)$ sei der Term der Ausgangsfunktion f, $t(x)$ ein Ersatzterm und s sei eine nicht negative reelle Zahl.
Ein Ersatzterm $t(x)$ liefert an der Stelle a für die approximative Berechnung des Funktionswertes $f(a)$ einen guten Näherungswert per Definition genau dann, wenn $|f(a) - t(a)| \le s$.
Ansonsten einen schlechten Näherungswert.

Bemerkung:
Die Ungleichung $|f(a)-t(a)| \leq s$ bedeutet: Der absolute Fehler darf höchstens so groß sein, wie die Zahl s. Die Zahl s wird manchmal auch als Toleranz bezeichnet.

Übung 2.4

Untersuchen Sie mit $s := 0.0005$, welche Ersatzterme aus Beispiel 2.4 an der Stelle $\pi/3$ einen guten bzw. einen schlechten Näherungswert erzeugen.

Übung 2.5

Der Term $q(x) := -(x-\frac{\pi}{2})^2 + 1$ ist kein Taylorpolynom (ohne weitere Begründung), trotzdem kann man mit diesem Term durchaus einige Funktionswerte von $\sin(x)$ approximativ gut beschreiben.

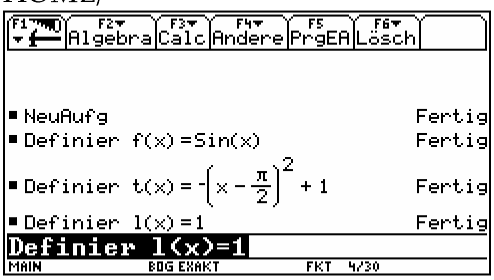
a) An welcher Stelle x_0 gilt: $|q(x_0) - \sin(x_0)| = 0$?

b) Untersuchen Sie mit $s := 0.01$ in einer CAS-Applikation, ob dieser Ersatzterm gute oder schlechte Näherungswerte für $\sin(\frac{\pi}{2}+0.1)$ und $\sin(\frac{\pi}{2}-0.3)$ liefert.

c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von S 01 falsch ist.

Übung 2.6

HOME/



[B 2.29]

a) Die Terme $t(x)$ und $l(x)$ sollen die approximative Berechnung von $\sin(100°)$ übernehmen. Wie groß muss die nicht negative, reelle Zahl s mindestens gewählt werden, wenn beide Ersatzterme gute Näherungswerte liefern sollen?
Antwort: $s \geq 1-\cos(\pi/18)$

b) Zeigen Sie, dass auch für den Ersatzterm $l(x)$ die Behauptung aus S 01 zutreffend ist.

Übung 2.7

a) Welche Entwicklungsstelle ist für die Ersatzrechnung von $\sin(10°)$ mittels Taylorpolynomen höchstens zweiten Grades (zum Teil subjektiv) günstiger: $a_1 := 0$ oder $a_2 := \pi/9$?
Standpunkt 1: a_2 ist günstiger im Sinne der Definition D 01;
Standpunkt 2: a_1 ist günstiger beim Vergleich des Rechenaufwandes und des numerischen Vorteils, der sich aus Definition D 01 bei a_2 ergibt.

b) Warum kann es für die Entwicklungsstelle a_1 kein Taylorpolynom zweiten Grades geben?
Antwort: Punktsymmetrie zur Entwicklungsstelle.

Zusammenfassung:

$$\text{Taylor}(f(x), x, g, a) \rightarrow t(x,a)$$

$f(x)$	nichtlinearer Funktionsterm
x	Argument von f
g	höchster Grad
a	Entwicklungsstelle

Mithilfe des Taylorbefehls können Ersatzterme $t(x,a)$ für die Funktionswertberechnung nichtlinearer Terme $f(x)$ an der Stelle x_0 aufgebaut werden. Die Ersatzterme nennt man Taylorpolynome. Je höher der Grad der Taylorpolynome ausfällt und je näher x_0 an der Entwicklungsstelle a liegt, desto genauer fallen die Näherungswerte in der Ersatzrechnung aus. Beste Übereinstimmung beider Funktionswerte liegt vor, wenn gilt: $x_0 = a$.

3 Approximation

Der Begriff Approximation ist ein in der numerischen Mathematik häufig verwendeter Begriff, welcher vielseitig benutzt wird und einen Annäherungsprozess oder auch einen bestimmten Zustand einer Annäherung beschreibt. Eine feste und einheitliche Definition für diesen Begriff gibt es in der Fachliteratur leider nicht. Wir benutzen ihn in zweifacher Hinsicht:
Unter Approximation verstehen wir im Folgenden den Übergang

- einer Zahl in eine andere Zahl, die als Näherungswert dient,
- eines Funktionsterms in einen Ersatzterm,

wobei in beiden Fällen die Abweichungen eine vorgegebene Toleranz nicht überschreiten sollen.

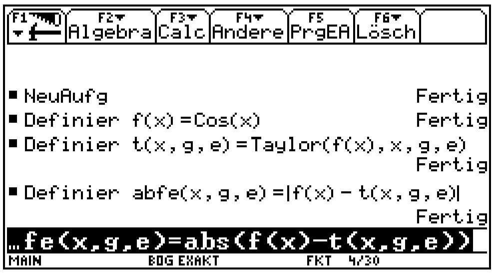
Auftrag 3.1

Bestimmen Sie mithilfe eines Taylorpolynoms den Wert von $\cos(48°)$. Dabei soll der Abstand zum genauen Wert höchstens 1/100 betragen.

Lösung zu 3.1

Taylorpolynome können wir mit dem Taylorbefehl generieren. Die Frage lautet: Welcher höchste Grad und welche Entwicklungsstelle sind einzugeben, sodass der Bedingung - absoluter Fehler höchstens 1/100 - entsprochen werden kann?
Wir arbeiten im Hauptbildschirm und legen eine CAS-Applikation an. Zuerst definieren wir die Funktion f mit $f(x) := \cos(x)$. Dann die Funktionen t und $abfe$ in Abhängigkeit von x ($x \in \mathbb{R}$), g und e. Dabei ist $g \in \mathbb{N}$ eine Variable für den höchsten Entwicklungsgrad und $e \in \mathbb{R}$ eine Variable für die Entwicklungsstelle.

HOME/



[B 3.1]

Behauptung: Es existieren eine natürliche Zahl g und eine reelle Zahl e für die gelten: $abfe\left(\frac{48\pi}{180}, g, e\right) \leq 1/100$.

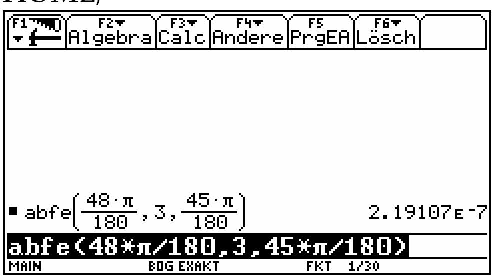
Experimentelles Bestimmen von g, e:

Wir löschen zunächst den HOME-Bildschirm und legen dann als Erstes den Wert für die Entwicklungsstelle e fest.
Wir wissen: Die Güte der Näherungswerte aus Taylorpolynomen wird durch die Wahl der Entwicklungsstelle beeinflusst. Sie ist bei gleicher Ordnung der Taylorpolynome um so besser, je näher die Entwicklungsstelle an den Argumenten der zu ersetzenden Funktionsterme liegt.
Wir setzen in unserem Beispiel $e := 45\pi/180$. Wir werden lediglich den höchsten Grad g variieren.

Test 1:

Ausgangsterm	Entwicklungsstelle	höchster Grad
$48\pi/180$	$45\pi/180$	3

HOME/



[B 3.2]

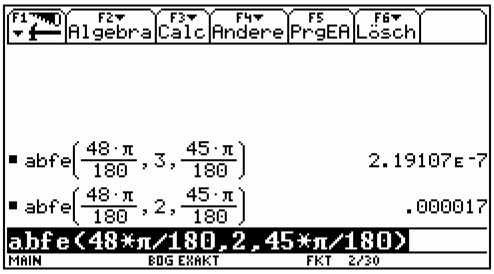
Interpretation: Im Prinzip sind wir fertig, denn es gilt bereits:

$$abfe\left(\frac{48\pi}{180},\, 3,\, \frac{45\pi}{180}\right) = 2.19 \cdot 10^{-7} \le 1/100 .$$

Neue Frage: Wie klein können wir den höchsten Grad g gestalten, wenn bei fester Entwicklungsstelle e der absolute Fehler die Zahl $s = 1/100$ nicht überschreiten soll? Wir testen weiter und verringern g um 1.

Test 2:

Ausgangs-term	Entwick-lungsstelle	höchster Grad
$48\pi/180$	$45\pi/180$	2



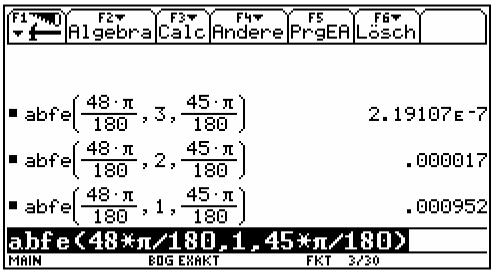
[B 3.3]

Interpretation:

Es gilt: $abfe\left(\frac{48\pi}{180},\, 2,\, \frac{45\pi}{180}\right) \le 1/100 .$

Test 3:

Ausgangs-term	Entwick-lungsstelle	höchster Grad
$48\pi/180$	$45\pi/180$	1



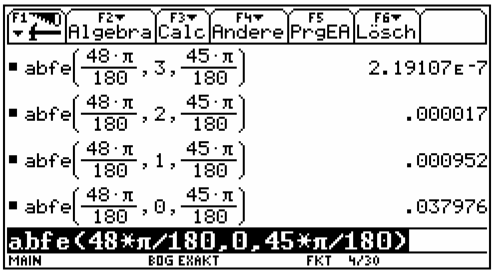
[B 3.4]

Interpretation: Auch hier gilt immer noch

$$abfe\left(\frac{48\pi}{180},\, 1,\, \frac{45\pi}{180}\right) \le 1/100 .$$

Test 4:

Ausgangs-term	Entwick-lungsstelle	höchster Grad
$48\pi/180$	$45\pi/180$	0



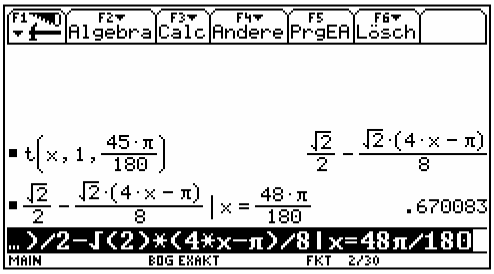
[B 3.5]

Interpretation: Jetzt gilt **nicht** mehr:

$$abfe\left(\frac{48\pi}{180},\, 0,\, \frac{45\pi}{180}\right) \le 1/100 .$$

Ergebnis: Bei der Entwicklungsstelle $e = \pi/4$ ist mit $g = 1$ der kleinste Entwicklungsgrad gefunden worden, um die Zahl $\cos(48°)$ mit der Toleranz von 1/100 genau zu beschreiben.

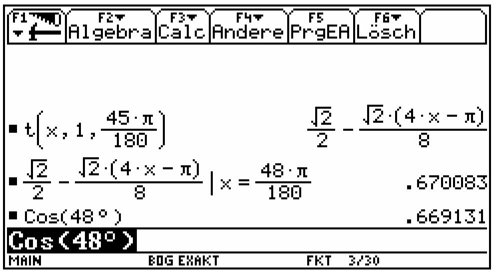
Kommentar: Wir bestimmen über den Ersatzterm $t\left(x, 1, \frac{45 \cdot \pi}{180}\right)$ an der Stelle $x = \frac{48 \cdot \pi}{180}$ einen Näherungswert für $\cos(48°)$.



[B 3.6]

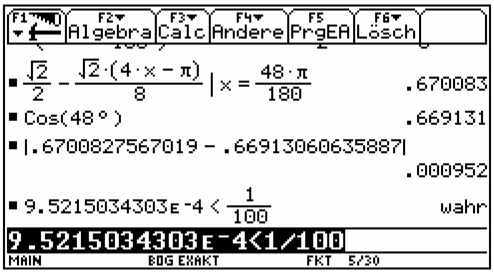
Interpretation: Das lineare Taylorpolynom in x mit dem höchsten Grad 1 und der Entwicklungsstelle $\pi/4$ lautet $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot(4\cdot x-\pi)}{8}$. Ein Näherungswert für $\cos(48°)$ mit der Toleranz von 1/100 ist $\cos(48°)\approx 0.670083$.

Für den Vergleich:



[B 3.7]

Nachweis zur Einhaltung der Toleranz:



[B 3.8]

Übung 3.1

Bestimmen Sie mittels linearer Taylorpolynome Näherungswerte für:

$\sqrt{\pi}$, $\ln\left(\frac{1988}{2002}\right)$, $\tan(17°)$ mit jeweils einer Toleranz von 3/1000.

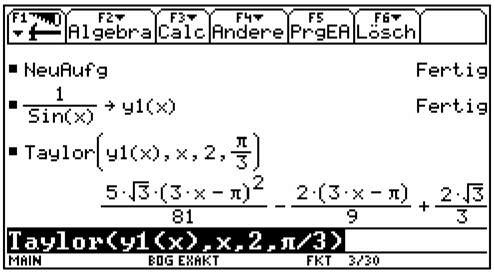
Auftrag 3.2

a) Erzeugen Sie ein Taylorpolynom zweiten Grades, das geeignet ist, einen Näherungswert für $1/\sin(58°)$ so zu bestimmen, dass der absolute Fehler nicht größer als 0.005 ist.

b) Stellen Sie für die approximative Ersatzrechnung aus a) einen entsprechenden Rechenablaufplan auf, der lediglich auf die Rechenoperationen: Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, Potenzierung zurückgreifen muss. Gegebenenfalls darf zusätzlich noch die Quadratwurzeltaste benutzt werden.

Lösung 3.2 a)

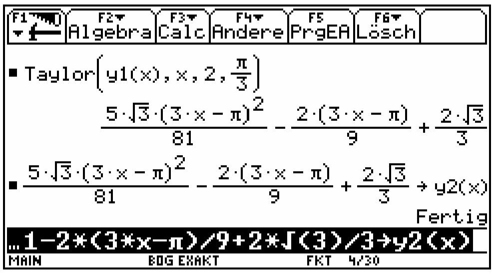
HOME/



[B 3.9]

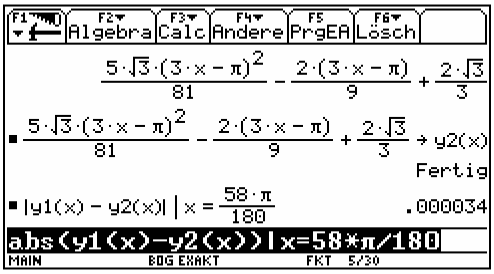
Dabei liegt die Entwicklungsstelle $\pi/3$ in unmittelbarer Nähe von $58\pi/180$.

$$\frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot(3\cdot x-\pi)^2}{81}-\frac{2\cdot(3\cdot x-\pi)}{9}+\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\rightarrow y_2(x)$$

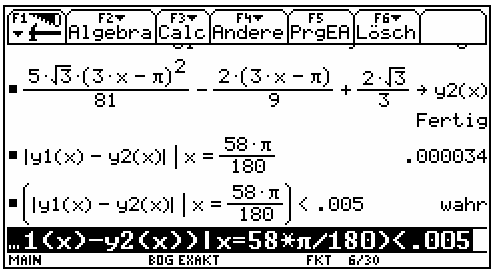


[B 3.10]

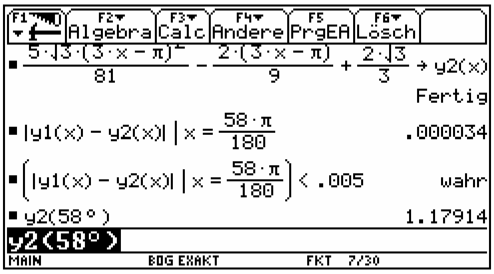
Toleranzbewertung:



[B 3.11]



[B 3.12]



[B 3.13]

Interpretation: Die durch das Taylorpolynom $y_2(x)$ erzeugte Zahl 1.17914 ist mit der Toleranz 0.005 ein guter Näherungswert für $1/\sin(58°)$.

Lösung 3.2 b)

Rechenablaufplan:

1.	$58 \cdot \pi / 180 \rightarrow a$	ENTER
2.	$3 \cdot a - \pi \rightarrow b$	ENTER
3.	$5 \cdot \sqrt{3} \cdot b \wedge 2/81 \rightarrow c$	ENTER
4.	$2 \cdot b / 9 \rightarrow d$	ENTER
5.	$2 \cdot \sqrt{3} / 3 \rightarrow e$	ENTER
6.	$c - d + e$	ENTER

Numerisches Ersatzergebnis:
1.179144068

4 Lineare Approximation und lokale Linearisierung an der Stelle *a*

Unter linearer Approximation in a versteht man den Übergang eines nichtlinearen Terms $f(x)$ in einen linearen Ersatzterm $l(x)$ mit der Forderung: Der lineare Ersatzterm $l(x)$ liefert an einer inneren Stelle a aus dem Definitionsbereich von f einen guten Näherungswert für $f(a)$. Es soll grundsätzlich gelten: $f(a) \approx l(a)$, wobei insbesondere nach der Definition D 01 die vorgegebene Toleranz $s \in \mathbb{R}_+$ einzuhalten ist: $|f(a) - l(a)| \leq s$.

Wir wollen im Anschluss aufzeigen, welche Eigenschaften ein solcher linearer Ersatzterm $l(x)$ im Einzelnen haben muss, um für eine lineare Approximation an der Stelle a benutzt werden zu können. Dabei interessieren wir uns für geometrische Funktionseigenschaften, die ähnlich wie beim Mikroskopieren sehr kleiner Objekte, unter gewissen Umständen sichtbar gemacht werden können.

Übung 4.1

a) Erzeugen Sie zu der Funktion f mit $f(x) := \sin(x)$ Taylorpolynome vom höchsten Grad 1, 3, 5 und 9 bei gleicher Entwicklungsstelle 0.
Zeichnen Sie anschließend in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Grafen dieser 4 Taylorpolynome, einschließlich des Grafen von $f(x)$.

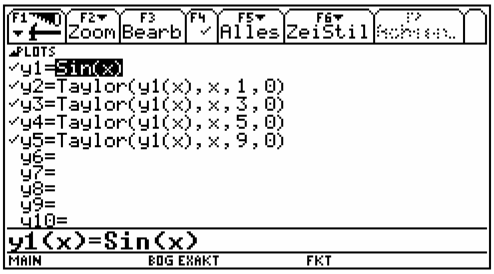
b) Beschreiben Sie den unterschiedlichen Verlauf der vier Taylorgrafen.

c) Welche Gemeinsamkeiten haben alle fünf Grafen?

Übung 4.2

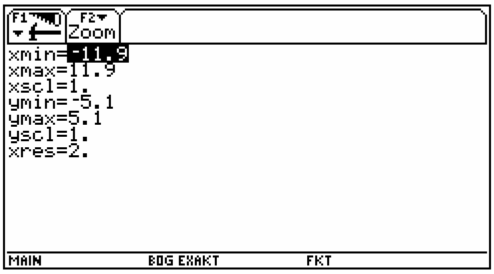
Wir interessieren uns jetzt in Anlehnung an Übung 4.1 c) für eine weitere Gemeinsamkeit aller fünf Grafen. Gegeben sei die grafisch-numerische Applikation:

Y=Editor/



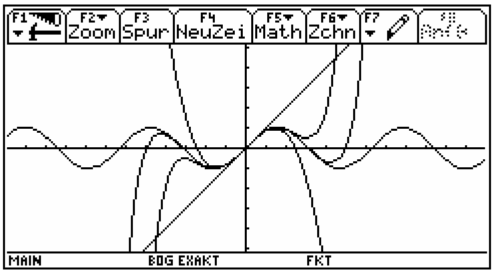
[B 4.1]

WINDOW/



[B 4.2]

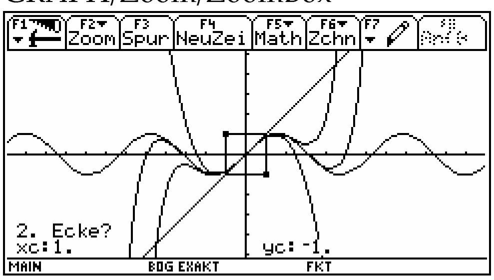
GRAPH/



[B 4.3]

a) Setzen Sie, wie im nächsten Bild illustriert, eine Zoombox in Form eines Rechtecks über die zwei diagonalen Eckpunkte $A(-1, 1)$ und $B(1, -1)$.

GRAPH/Zoom/ZoomBox

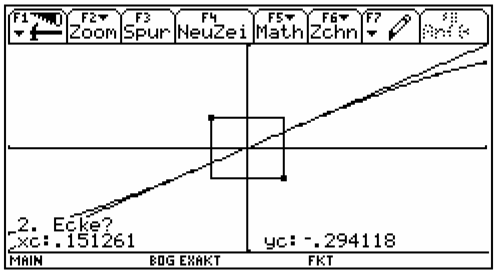


[B 4.4]

b) Führen Sie den Zoomvorgang aus und beschreiben Sie den Verlauf der Grafen im Bildausschnitt.

c) Setzen Sie, wie im nächsten Bild illustriert, eine Zoombox in Form eines Rechtecks über die zwei diagonalen Eckpunkte C und D mit den Koordinaten: C (-0.151261, 0.294118);
D (0.151261, -0.294118).

GRAPH/Zoom/ZoomBox



[B 4.5]

d) Führen Sie den Zoomvorgang aus und beschreiben Sie den Verlauf der Grafen.

e) Welche geometrische Eigenschaft erscheint tendenziell bei der Betrachtung aller Grafen?

f) Überzeugen Sie sich, ob sich Ihre letzte Aussage in einer noch kleineren Umgebung der Entwicklungsstelle Null bestätigen lässt. Zoomen Sie entsprechend.

Die letzte experimentelle Übung zeigt: In einem um den Entwicklungspunkt $P(0,0)$ sehr eng gefassten Bildausschnitt erkennt man mittels Spurfunktion, dass die Grafen aller fünf eingetragenen Terme annähernd übereinander liegen. Alle Grafen nehmen dabei nahezu die Form einer Geraden an. Setzt man den Zoomvorgang immer weiter fort, sodass stets der Entwicklungspunkt P in allen Bildausschnitten zu sehen ist, dann lässt sich ab einem bestimmten Zoomschritt feststellen:

(I) **„Zoomgerade in a“:** In einer sehr kleinen Umgebung der Entwicklungsstelle a formen sich die Grafen des Ausgangsterms und aller am Zoomvorgang beteiligten Taylorpolynome scheinbar in eine einzige „Gerade“ um, welche durch den Entwicklungspunkt $P(a, f(a))$ verläuft.

(II) **„Zoomanstieg in a“:** Der lokale Anstieg der Ausgangsfunktion ist in einem entsprechend kleinen Bildausschnitt augenscheinlich gleich dem Anstieg der scheinbaren „Geraden“ aller beteiligter Taylorpolynome.

Wenn in allen noch kleineren Zoomausschnitten, in denen der Entwicklungspunkt $P(a, f(a))$ liegt, die beiden Eigenschaften:
- „Zoomgerade in a“ und
- „Zoomanstieg in a“

auf die jeweilige Funktion f zutreffen, spricht man in der Mathematik von einer **lokalen Linearisierung der Funktion f in a**.

Übung 4.3

a) Zeigen Sie am Rechner anschaulich, dass sich die Sinusfunktion auch an anderen Stellen ihres reellen Definitionsbereiches lokal linearisieren lässt. Wählen Sie neue Entwicklungsstellen (mindestens drei) aus und dokumentieren Sie Ihre Rechnerexperimente.

b) Gibt es Ihrer Meinung nach Stellen am Sinusgrafen, an denen eine lokale Linearisierung nicht möglich ist? Begründen Sie.

Übung 4.4

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ x^3 & \text{für } x > 1 \end{cases},$$

$$g(x) := (x-1) \cdot |x-1|.$$

a) Sind die beiden Funktionen an der Stelle $a = 1$ mithilfe linearer Taylorpolynome rechnergestützt lokal linearisierbar?

b) Welchen augenscheinlichen Anstieg (Näherungswert) haben beide Funktionen an der Stelle a?

Übung 4.5

Bestimmen Sie aus der Darstellung der lokalen Linearisierung auf mindestens zwei Stellen nach dem Dezimalpunkt genau den approximierten Anstieg der Funktion f mit $f(x) := \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 := 2.5$. Benutzen Sie für das Zoomen ausschließlich die beiden Befehle:
- GRAPH/Spur und
- GRAPH/Zoom/Vergröß.
-

a) Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und definieren Sie eine geeignete grafisch-numerische Applikation, die anschaulich die lokale Linearisierung in x_0 vermuten lässt.

b) Ermitteln Sie in einer „sehr kleinen“ Umgebung von x_0 in guter Näherung einen linearen Ersatzterm für die Funktion f.

Lösung zu b): $-0.16 \cdot x + 0.8$

5 Die Menge L_a und die Minimalitätseigenschaft

Die Rechnerexperimente zur lokalen Linearisierung aus dem vorhergehenden Abschnitt drängen uns zu einer neuen Herausforderung, die wir als Projektaufgabe formulieren wollen.

Projektaufgabe: Wie können wir die linearen Taylorpolynome zu einer gegebenen Funktion f in einer Umgebung der Entwicklungsstelle a analytisch konstruieren, **ohne** dabei auf den Taylorbefehl angewiesen zu sein?
Eine Konstruktion von linearen Taylorpolynomen erfordert ein planmäßiges Vorgehen.

Lösungsplan:

1. Beschreiben eines linearen Terms mit all seinen freien Parametern.

2. Berechenbarkeit aller Formvariablen aufzeigen und testen.

3. Nachweis darüber führen, ob es sich bei dem konstruierten Polynom tatsächlich um ein lineares Taylorpolynom handelt oder nicht.
   Dieser Punkt in unserem Plan ist für uns, aufgrund der uns nicht zur Verfügung stehenden Beweismittel, nicht erfüllbar. Wir können lediglich an Einzelbeispielen eine derartige Rechnerbestätigung liefern bzw. den Sachverhalt widerlegen, aber leider nicht beweisen.

INFO | Einführung aller Parameter

Ein lineares Taylorpolynom zu einer gegebenen Funktion f hat natürlich die Struktur eines linearen Terms in x:

$$m \cdot x + n$$

mit den drei reellen Parametern: x, m, n.

Dabei vermittelt dieser lineare Term in x eine lineare Funktion. Wir bezeichnen sie vorerst mit lin.

$$lin(x, m, n) := m \cdot x + n.$$

Wie man die beiden reellen Variablen m und n (Formvariablen) berechnen kann, soll im Folgenden geklärt werden.

INFO | Berechenbarkeit von n

Die Berechenbarkeit der Formvariable n ist auch abhängig von der Entwicklungsstelle a. Da $lin(x, m, n)$ ein Taylorpolynom zur Funktion f sein soll, gilt nach dem Satz S 01:

$$f(a) = lin(a, m, n)$$
$$f(a) = m \cdot a + n$$
$$n = f(a) - m \cdot a$$

(Bildungsvorschrift für n)

Wir erkennen: Um die Formvariable n berechnen zu können, müssen der Funktionswert $f(a)$, der Anstieg m und die Entwicklungsstelle a von f bekannt sein.
Die Ersetzung von n in lin ergibt:

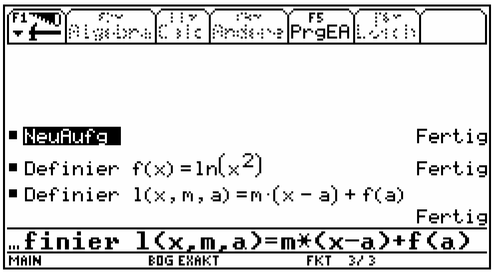
$$\begin{aligned} lin(x, m, f(a) - m \cdot a) &= m \cdot x + f(a) - m \cdot a \\ &= m \cdot x - m \cdot a + f(a) \\ &= m \cdot (x - a) + f(a). \end{aligned}$$

Wir ändern den Funktionsnamen und setzen: $l(x, m, a) := m \cdot (x - a) + f(a)$.

Bildung der Menge L_a: Fasst man alle linearen Terme in x, die die Bedingung $l(a, \ldots) = f(a)$ erfüllen, zu einer Menge zusammen, dann erhält man mit der Zuordnungsvorschrift $m \cdot (x - a) + f(a)$ eine Menge L_a von linearen Termen zur Ausgangsfunktion f.

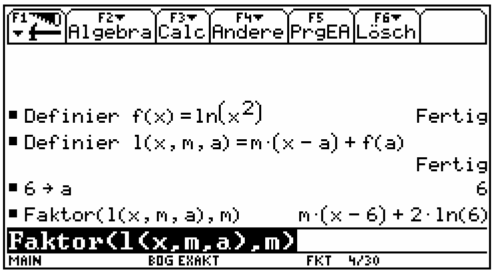
Beispiel 5.1:
Gegeben: $f(x) := \ln(x^2)$, $(x \neq 0)$ und die Menge L_a mit $l(x, m, a)$ als Element von L_a.

HOME/



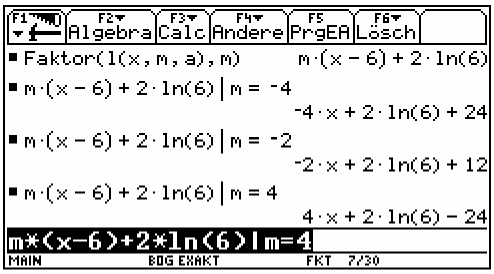
[B 5.1]

Ordnet man beispielsweise: $6 \rightarrow a$ zu, so erhält man mit dem algebraischen Umformungsbefehl HOME/Algebra/Faktor(



[B 5.2]

den linearen Term in x: $m \cdot (x-6) + 2 \cdot \ln(6)$ mit m als noch freien Parameter. Fasst man alle Terme dieser Art zusammen, dann entsteht in diesem Fall zur Funktion f die spezielle Menge L_6 mit $L_6 := \{m \cdot (x-6) + 2 \cdot \ln(6), x \in \mathbb{R}^*, m \in \mathbb{R}\}$ und $l(x,m,6) \in L_6$. Konkrete Elemente aus L_6 findet man dann leicht mit dem Mit-Operator, angesetzt auf m.



[B 5.3]

Interpretation: Vertreter aus L_6 sind z.B.:

$$l(x,-4,6) = -4 \cdot x + 2 \cdot \ln(6) + 24,$$
$$l(x,-2,6) = -2 \cdot x + 2 \cdot \ln(6) + 12,$$
$$l(x,4,6) = 4 \cdot x + 2 \cdot \ln(6) - 24.$$

Übung 5.1

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) := \ln(x^2)$ und die Menge L_a mit $l(x,m,a) := m \cdot (x-a) + f(a)$ als Element von L_a.

a) Geben Sie jenen Taylorbefehl an, der das Taylorelement aus L_6 erzeugt.
b) Veranschaulichen Sie in einer grafisch-numerischen Applikation einige Vertreter aus L_6.
c) Beschreiben Sie die gemeinsame Lage aller Grafen aus L_6.

Übung 5.2

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) := |x+1|$.

a) Beschreiben Sie die Menge L_a zur Funktion f.
b) Veranschaulichen Sie in einer grafisch-numerischen Applikation vier Vertreter aus L_1 (bzw. L_{-1}) und beschreiben Sie die Lage der einzelnen Grafen aus dieser Menge.
c) Versuchen Sie am Rechner ein lineares Taylorpolynom zur Menge L_1 (bzw. L_{-1}) herzustellen. Interpretieren Sie die Ausgabe. Was können Sie über die Existenz des linearen Taylorpolynoms aus L_{-1} aussagen?
d) An welchen Stellen ist die Funktion f lokal linearisierbar und an welchen nicht? Argumentieren Sie.

Übung 5.3

Gegeben sei eine Funktion f, die in einer Umgebung von a definiert ist. Welche Gemeinsamkeit haben stets alle Elemente aus L_a?

Wir wissen nun: Es gibt Mengen linearer Terme, die ein lineares Taylorpolynom enthalten und wiederum auch Mengen dieser Art, die kein lineares Taylorpolynom aufweisen können. Wir wollen mit dem Thema „Berechenbarkeit von m“ nicht nur eine Formel beschreiben, die uns vorgibt, wie man die Zahl m zu berechnen hat, sondern vielmehr in Erfahrung bringen: **Unter welcher Bedingung besitzt eine Menge L_a einer Funktion f ein lineares Taylorpolynom?**

Übung 5.4

Wiederholen Sie den Satz S 01, indem Sie sich den Inhalt dieses Satzes an drei verschiedenen grafisch-numerischen Applikationen veranschaulichen.

Unser Ziel ist die analytische Konstruktion der linearen Taylorpolynome. Wir beginnen mit einem Funktionsbeispiel, bei dem wir über unseren Rechner uns anzeigen lassen, wie ein entsprechendes lineares Taylorpolynom auszusehen hat.

Beispiel 5.2:

Gegeben sind ein nichtlinearer Ausgangsterm $f(x)$ und eine Entwicklungsstelle a aus dem Inneren des Definitionsbereiches von f mit $f(x) := x^2$, $a := 3$.

Vom Rechner lassen wir uns das zugehörige lineare Taylorpolynom über den Befehl $\text{Taylor}(f(x), x, 1, 3)$ ausgeben. Die symbolische Auswertung ergibt dann:

$$6 \cdot (x-3) + 9 \qquad (*)$$

Wir beschreiben zur Funktion f die Menge L_3 mit

$$L_3 := \{m \cdot (x-3) + f(3),\ x, m \in \mathbb{R}\},$$
$$l(x, m, 3) \in L_3$$

$$\begin{aligned} l(x,m,3) &= m \cdot (x-3) + f(3) \\ &= m \cdot (x-3) + 9 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} f(3) &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned} \right.$$

Wir vergleichen den rechten Term mit der Rechnerausgabe (*):

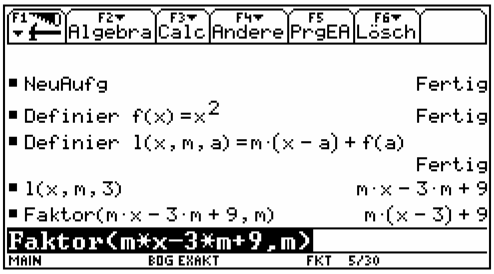
$$m \cdot (x-3) + 9$$
$$6 \cdot (x-3) + 9$$

und stellen fest: Mit $m = 6$ erhält man in der Menge L_3 zur Funktion f das lineare Taylorpolynom $l(x, 6, 3) \in L_3$.

Übung 5.5

Veranschaulichen Sie in der vorgegebenen CAS-Applikation, dass die beiden Behauptungen aus S 01 auf **alle** Elemente aus L_3 zutreffen.

HOME/



[B 5.4]

Offensichtlich hilft uns der Satz S 01 nicht weiter. Wir schlagen deshalb einen anderen Weg ein.

Eine lokale Eigenschaft von Funktionen, wie die der lokalen Linearisierung an der Stelle a, kann mithilfe linearer Taylorpolynome am Rechner durch Zoomen sichtbar gemacht werden. Wir verfolgen deshalb den Zusammenhang zwischen der lokalen Linearisierung an der Stelle a und der linearen Approximierbarkeit mittels linearer Taylorpolynome tiefgründiger. Zunächst eine wiederholende Übung.

Übung 5.6

a) Erläutern Sie an dem Beispiel 5.2 den Begriff der lokalen Linearisierung. Benutzen Sie dabei das lineare Taylorpolynom $6 \cdot (x-3) + 9$.

b) Veranschaulichen und argumentieren Sie mittels einer grafisch-numerischen Applikation, dass jedes andere Element aus L_3 für die lokale Linearisierung von f an der Stelle 3 nicht in Frage kommt.

Wir wissen bereits: Wenn eine Funktion an einer Stelle lokal linearisierbar ist, dann lässt sie sich an dieser Stelle durch ein lineares Taylorpolynom approximieren.
Für die lineare Approximation an der Stelle a müssen zwei Eigenschaften gelten:

(1) Es gibt eine reelle Zahl a mit $f(a) = l(a, m, a)$;

(2) Für alle $x \in U(a)$: $f(x) \approx l(x, m, a)$ (unter Einhaltung einer Toleranz s).

Die erste Eigenschaft ist mit jedem Element aus L_3 erfüllt. Passen wir die zweite Eigenschaft an unser Beispiel an:

Für alle $x \in U(3)$: $\left| \begin{array}{l} f(x) \approx l(x, m, 3) \\ x^2 \approx m \cdot (x-3) + 9 \end{array} \right.$

Ersetzen wir das Rundungszeichen durch ein Gleichheitszeichen, müssen wir eine neue Variable zur Korrektur einführen. Wir bezeichnen sie mit r.

Für alle $x \in U(3)$:

$$x^2 = (x-3) + 9 + r,\ r \in \mathbb{R}.$$

Frage: Wie kann der Wert von r berechnet werden? Die rechnerische Bedeutung der reellen Zahl r ergibt sich aus der Differenzbildung:

$$r = f(x) - l(x, m, a).$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung den absoluten Betrag, so entsteht:

$$|r| = |f(x) - l(x, m, a)|.$$

Der absolute Betrag der reellen Zahl r ist gleich dem absoluten Fehler, den man begeht, wenn man an der Stelle x den Funktionswert $f(x)$ durch den approximativen Funktionswert $l(x, m, a)$ bei festem m und a ersetzt.

Nehmen wir an, wir haben den Wert von m (in dem Fall $m = 6$) bereits so bestimmt, dass $l(x, m, 3)$ das lineare Taylorpolynom aus L_3 darstellt. Nach Satz S 01 folgt: Für das Taylorpolynom $l(x, 6, 3)$ gilt in einer Umgebung der Entwicklungsstelle 3:

Behauptung (1): $f(3) = l(3, 6, 3)$,

Behauptung (2): $\lim\limits_{x \to 3} |f(x) - l(x, 6, 3)| = 0$.

Die Behauptung (2) können wir mit der neuen Variable r auch so aufschreiben:

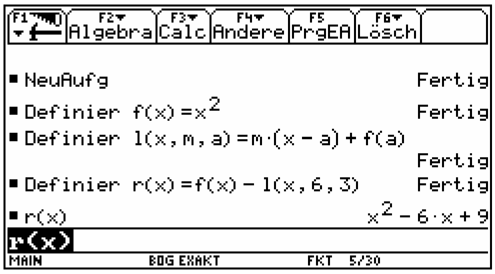
Behauptung (2*): $\lim\limits_{x \to 3}(|r|) = 0$.

Die Variable r ist von x abhängig. Also gibt es einen Term $r(x)$ - wir nennen ihn ab sofort Restterm - für den gelten muss:

$$\lim_{x \to 3}(|r(x)|) = 0.$$

Auch hierbei können wir unseren Rechner danach befragen, wie im Beispiel 5.2 der Term $r(x)$ tatsächlich auszusehen hat.

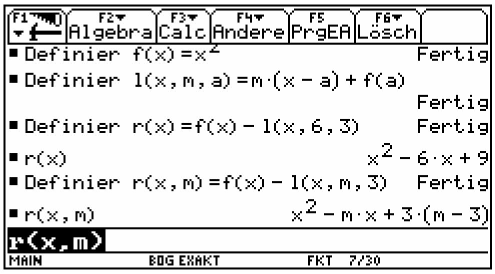
HOME/



[B 5.5]

Interpretation: $r(x) = x^2 - 6x + 9$.

Wir erweitern die Definition des Restterms $r(x)$, indem wir den zweiten Parameter m in die Argumentenliste von r mit aufnehmen.



[B 5.6]

Interpretation: Zu jedem linearen Term $l(x, m, 3)$ aus L_3 gibt es genau einen Restterm $r(x, m)$.

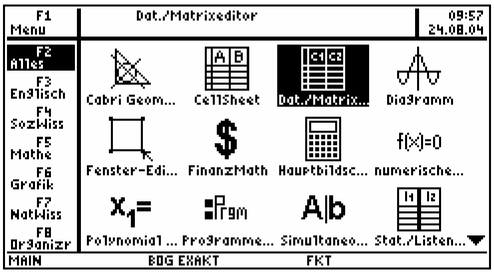
Bildungsvorschrift für $r(x,m)$:

$$x^2 - m\cdot x + 3\cdot(m-3)$$

mit $x, m \in \mathbb{R}$.

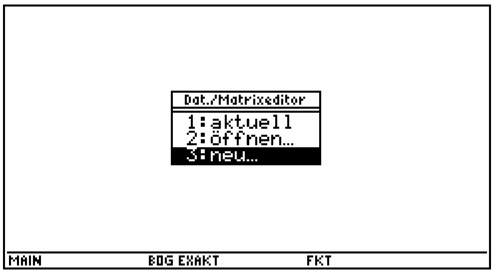
Wir setzen die CAS-Applikation für weitere Tests im Daten/Matrix-Editor des Generalbildschirms fort.

Generalbildschirm/



[B 5.7 a]

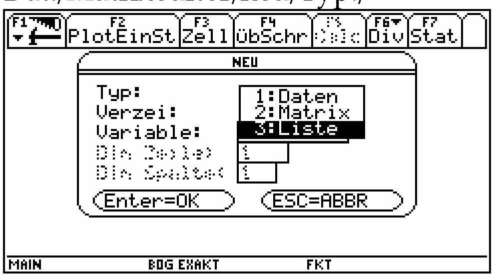
Dat./Matrixeditor/



[B 5.7 b]

Wir wählen den Datentyp Liste aus,

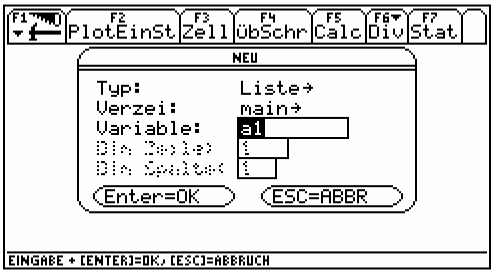
Dat./Matrixeditor/neu/Typ:/



[B 5.8]

um mit Tabellenspalten symbolisch operieren zu können. Wir bezeichnen den Datentyp mit „$a1$“

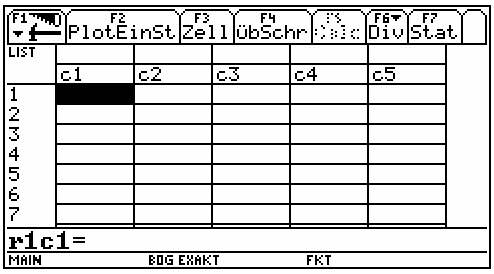
Dat./Matrixeditor/neu/Variable:



[B 5.9]

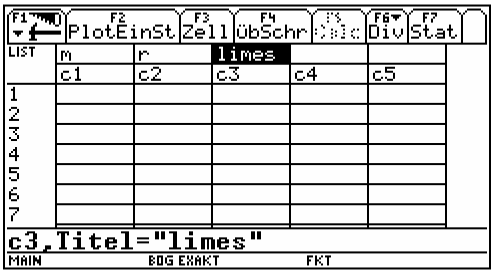
und gelangen in ein Tabellenrechenblatt.

Dat./Matrixeditor/Liste/main/$a1$/



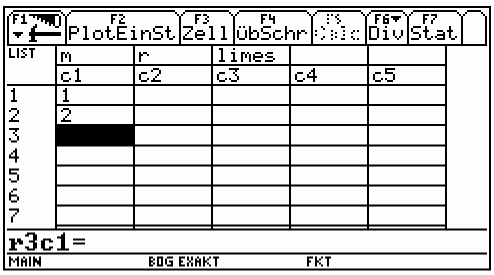
[B 5.10]

Wir beginnen die ersten drei Listenköpfe zu benennen, welches keinerlei rechnerische Auswirkungen hat; lediglich erfüllt es den Anspruch eines Kommentartextes.



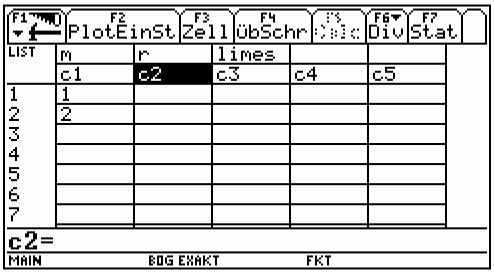
[B 5.11]

Nun belegen wir die ersten zwei Zeilen der Spalte $c1$ mit willkürlich ausgedachten symbolischen Werten für m.



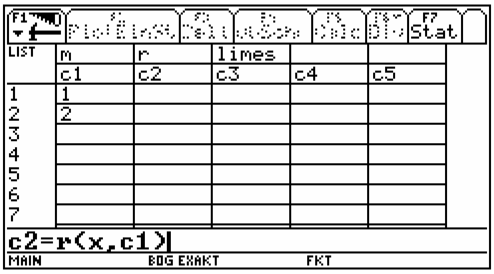
[B 5.12]

Wir markieren den Bezeichner $c2$,



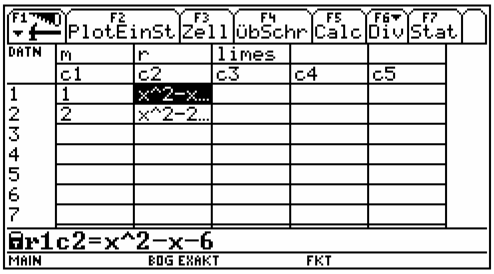
[B 5.13 a]

drücken ENTER und definieren in der Schreibzeile: $c2 = r(x, c1)$



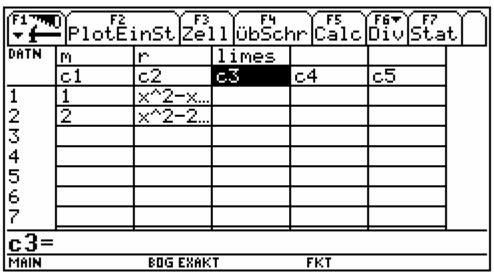
[B 5.13 b]

Wir drücken ENTER. Die symbolischen Werte der einzelnen Restterme erscheinen dann automatisch in der Spalte $c2$.



[B 5.13 c]

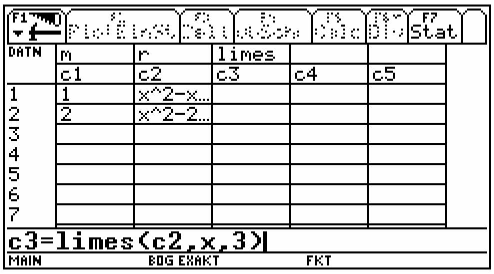
In der dritten Spalte definieren wir spaltenfunktional $c3$. Wir markieren den Bezeichner $c3$.



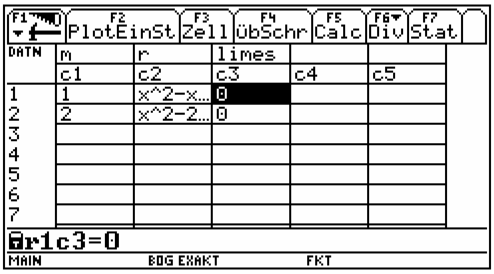
[B 5.14 a]

drücken ENTER und definieren in der Schreibzeile spaltenfunktional die Liste für die Limesberechnungen.

$$c3 = \text{limes}(c2, x, 3)$$



[B 5.14 b]



[B 5.14 c]

Interpretation: Für alle eingetragenen Werte von $m \in c1$ gilt: $\lim\limits_{x\to 3}(r(x,m)) = 0$.

Um eine Besonderheit für das lineare Taylorpolynom innerhalb der Menge L_3 erkennen zu können, bilden wir in der vierten Spalte das Verhältnis:

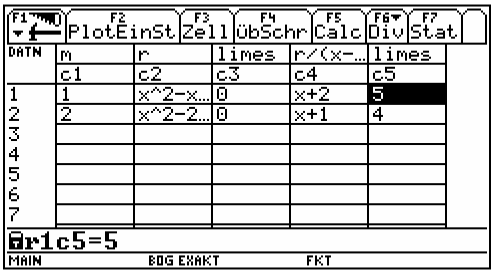
$$\frac{r(x,m)}{x-3}$$

den so genannten relativen Restterm zur Menge L_3. In der 5. Spalte berechnen wir symbolisch den Limes für $x \to 3$:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{r(x,m)}{x-3}\right).$$

Wir definieren die vierten und fünften Spaltenlisten wie folgt:
$c4 = c2/(x-3)$ und $c5 = \text{limes}(c4, x, 3)$.

Die symbolische Auswertung der Spaltenlisten $c4$ und $c5$ ergibt:

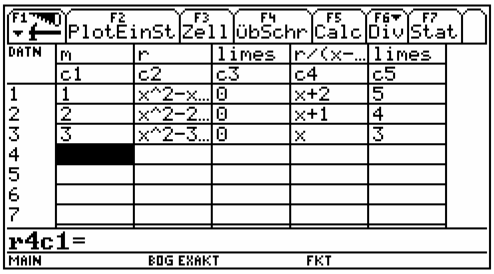


DATN	m	r	limes	r/(x-...	limes
	c1	c2	c3	c4	c5
1	1	x^2-x...	0	x+2	5
2	2	x^2-2...	0	x+1	4
3					
4					
5					
6					
7					

r1c5=5

[B 5.15]

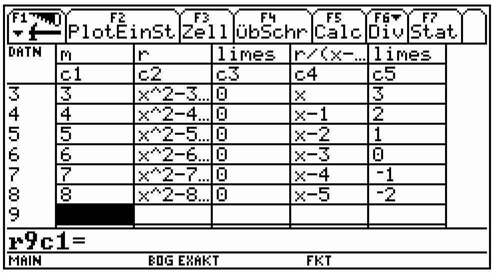
Der Vorteil dieses Untermenüs zeigt sich vor allem in der symbolischen Spaltenkalkulation. Wir können in dieser interaktiven Tabelle in der ersten Spalte (Liste $c1$) weitere Symbole für m eintragen. Der Rechner wertet entsprechend unseren Spaltendefinitionen simultan symbolisch aus.



DATN	m	r	limes	r/(x-...	limes
	c1	c2	c3	c4	c5
1	1	x^2-x...	0	x+2	5
2	2	x^2-2...	0	x+1	4
3	3	x^2-3...	0	x	3
4					
5					
6					
7					

r4c1=

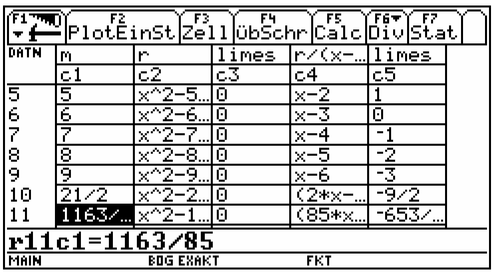
[B 5.16]



DATN	m	r	limes	r/(x-...	limes
	c1	c2	c3	c4	c5
3	3	x^2-3...	0	x	3
4	4	x^2-4...	0	x-1	2
5	5	x^2-5...	0	x-2	1
6	6	x^2-6...	0	x-3	0
7	7	x^2-7...	0	x-4	-1
8	8	x^2-8...	0	x-5	-2
9					

r9c1=

[B 5.17 a]



DATN	m	r	limes	r/(x-...	limes
	c1	c2	c3	c4	c5
5	5	x^2-5...	0	x-2	1
6	6	x^2-6...	0	x-3	0
7	7	x^2-7...	0	x-4	-1
8	8	x^2-8...	0	x-5	-2
9	9	x^2-9...	0	x-6	-3
10	21/2	x^2-2...	0	(2*x-...	-9/2
11	1163/...	x^2-1...	0	(85*x...	-653/...

r11c1=1163/85

[B 5.17 b]

Interpretation: In der Spalte $c2$ stehen nur Polynome zweiten Grades in Abhängigkeit von x. In der Spalte $c3$ stehen lauter Nullen. In der Spalte $c4$ stehen nur lineare Polynome in Abhängigkeit von x. In der Spalte $c5$ stehen verschiedene rationale Zahlen, wobei in der 6. Zeile ($c1:\ m=6$) die Zahl 0 symbolisch ausgewertet wird.

Wir erkennen und vermuten:

(A) Wenn $m=6$, dann $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{r(x,m)}{x-3}\right)=0$.

In allen anderen angelegten Zeilen gilt:

(B) Wenn $m\neq 6$, dann $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{r(x,m)}{x-3}\right)\neq 0$.

Übung 5.7

Testen Sie in diesem interaktiven Rechenblatt die Vermutungen (A) und (B) durch die Eingabe weiterer Symbole für m aus. Bestätigt sich die Vermutung (B)?

Auftrag 5.1

Beweisen Sie die Umkehrung der Vermutung (A).

Lösung 5.1

Gegeben sind: $f(x):=x^2$ und $l(x,m,3)\in L_3$.

Wir bilden die **Umkehrung von (A)**:

Wenn $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f(x)-l(x,m,3)}{x-3}\right)=0$,

dann $m=6$.

Wir beweisen die Umkehrung von (A):

Vor.: $f(x):=x^2$, $l(x,m,3)\in L_3$,

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-l(x,m,3)}{x-3}\right)=0$$

Beh.: $m=6$

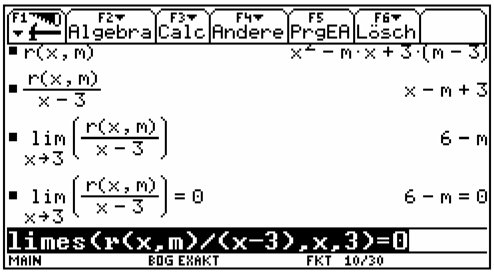
Beweisführung:

1.	$l(x,m,3) = m\cdot(x-3)+9$	$l(x,m,3)\in L_3$
2.	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f(x)-l(x,m,3)}{x-3}\right)=0$ $6-m=0$	Siehe Teilbegründung* und Bild [B 5.18]
3.	$6-m=0 \Leftrightarrow$ $m=6$	Äquivalente Gleichungen

Teilbegründung*:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-l(x,m,3)}{x-3}\right) &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-(m\cdot(x-3)+9)}{x-3}\right)\\ &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-m\cdot x+3\cdot m-9}{x-3}\right)\\ &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9-m\cdot x+3\cdot m}{x-3}\right)\\ &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9-m\cdot(x-3)}{x-3}\right)\\ &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{(x+3)\cdot(x-3)-m\cdot(x-3)}{x-3}\right)\\ &= \lim_{x\to 3}((x+3)-m)\\ &= 6-m\end{aligned}$$

HOME/



[B 5.18]

Wir wollen unsere Überlegungen verallgemeinern, indem wir die Entwicklungsstelle a variabel gestalten: $l(x,m,a)\in L_a$, $t(x,a)=\text{Taylor}(f(x),x,1,a)$.

Gegeben: $f_1(x) := 2\cdot x^2 - 1.5$,

$f_2(x) := 4\cdot x^3$,

$f_3(x) := (x+10)^2$.

Wir vermuten speziell für f_1, f_2 und f_3:
Es gibt jeweils eine reelle Zahl z für die gilt:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f_{1(,2,3)}(x)-l(x,z,a)}{x-a}\right)=0$$

$$\Rightarrow l(x,z,a)=t(x,a),$$

wobei $t(x,a) := \text{Taylor}(f_{1(,2,3)}(x),x,1,a)$.

Übung 5.8

Bestätigen Sie diese 3 Vermutungen.

Wir verallgemeinern weiter und sind somit in der Lage, eine Antwort auf die eingangs gestellte **Existenzfrage** zu geben:

Frage: Unter welcher Bedingung besitzt eine Menge L_a zu einer Funktion f ein lineares Taylorpolynom?
Die Existenz eines linearen Taylorpolynoms mit der Entwicklungsstelle a innerhalb der Menge L_a hängt unmittelbar von der Existenz einer reellen Zahl c ab, mit der der Limes des relativen Restterms für $x\to a$ gleich 0 wird. Auf alle anderen Elemente von L_a trifft diese Limeseigenschaft nicht zu. Wir formulieren präzise:

Satz **S 02**

f sei eine Funktion in x und a sei eine Stelle aus dem Inneren des Definitionsbereiches von f.

$l(x,m,a) := m\cdot(x-a)+f(a)$ sei ein linearer Term in x mit Anstieg m und es gelte: $l(x,m,a)\in L_a$.
In der Menge L_a ist ein lineares Taylorpolynom zur Funktion f in der Entwicklungsstelle a als Element genau dann enthalten, wenn es eine reelle Zahl c derart gibt, sodass gilt:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-l(x,c,a)}{x-a}\right)=0.$$

(Minimalitätseigenschaft)

Die Beweismittel sind uns leider nicht gegeben.

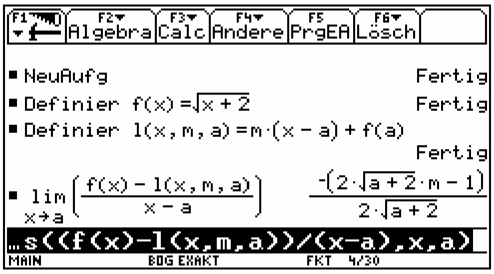
Bemerkung: Mit der Minimalitätseigenschaft haben wir eine implizite Bildungsvorschrift für den Anstieg m eines linearen Taylorpolynoms gefunden (siehe folgendes Beispiel).

Beispiel 5.3:

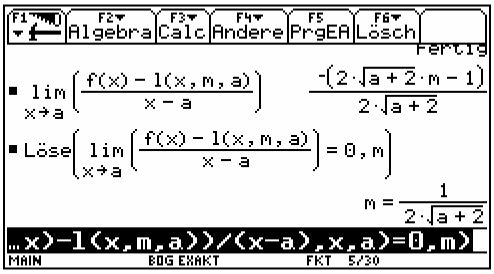
$$f(x) := \sqrt{x+2}$$

Besitzt die Funktion f an der Stelle $a := 5$ ein lineares Taylorpolynom? Wenn ja, welchen Anstieg hat es an dieser Stelle?
Falls die Minimalitätseigenschaft erfüllt ist, liefert unter Umständen der entsprechende HOME/Algebra/Löse-Befehl den symbolischen Wert für m in Abhängigkeit von a.

HOME/

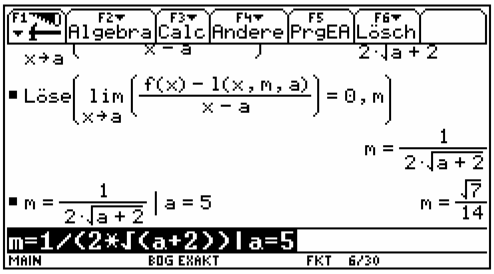


[B 5.19]



[B 5.20]

Eine Substitution für a liefert schließlich den gewünschten Anstieg an der Stelle $a = 5$.



[B 5.21]

Interpretation: Die Funktion f mit $f(x) := \sqrt{x+2}$ besitzt an der Stelle $a = 5$ ein lineares Taylorpolynom mit dem Anstieg $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

Übung 5.9

Überprüfen Sie mit dem Taylorbefehl den Wert für m.

Auftrag 5.2

Veranschaulichen Sie an einem Funktionsbeispiel tabellarisch und grafisch, welche Bedeutung der Grenzwert aus der Minimalitätseigenschaft hat.

Lösung 5.2

Wir wählen die Funktion f mit $f(x) := x^3$ aus und betrachten dabei die Stelle $a := 2$ und damit die Menge L_2 der linearen Terme:

$$\begin{aligned} l(x,m,2) &= m\cdot(x-2) + f(2) \\ &= m\cdot(x-2)+8. \end{aligned}$$

Die Existenz eines linearen Taylorpolynoms zur Funktion f an der Stelle a zeigt sich dann in dem Zusammenhang: In der Menge L_2 ist das lineare Taylorpolynom zur Funktion f in der Entwicklungsstelle 2 als Element genau dann enthalten, wenn es eine reelle Zahl c derart gibt, sodass gilt:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-l(x,c,2)}{x-a}\right) = 0.$$

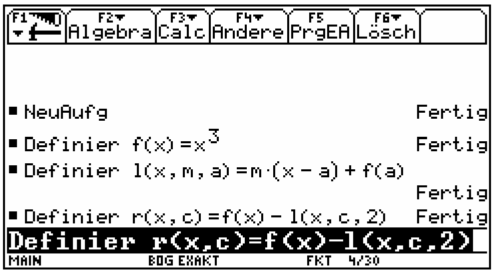
Die gesuchte Zahl c gibt den speziellen Wert für m an, bei der nach Auswertung

von: $l(x,m,2)\big|m=c$ die lineare Funktion l aus L_2 in die lineare Taylorfunktion (falls diese existiert) übergeht.
Untersuchen wir den Limes aus der Minimalitätseigenschaft etwas genauer und definieren r, die Restfunktion:

$$r(x,c) := f(x) - l(x,c,2).$$

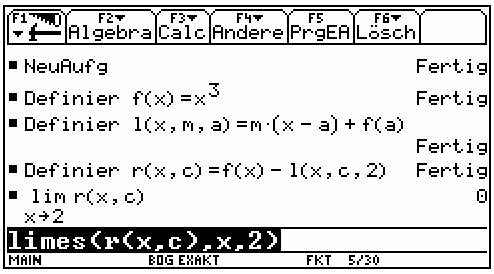
Wir beginnen für neue Tests, eine entsprechende CAS-Applikation anzulegen.

HOME/



[B 5.22]

Nach Satz S 01 muss gelten:



[B 5.23]

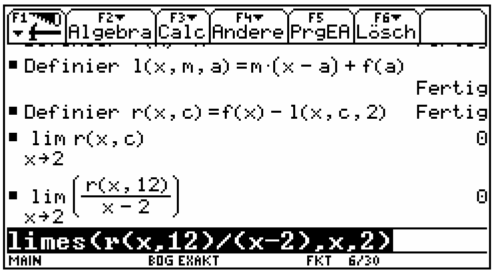
Interpretation: $\lim\limits_{x\to 2} r(x,c) = 0$. Dabei spielt der Wert von c keine besondere Rolle.
Nicht so verhält es sich mit der Zahl c bei der Berechnung des Limes

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{r(x,c)}{x-2}\right).$$

Möchte man zur weiteren Auswertung dieses Limes einen Grenzwertsatz für Funktionen anwenden, zum Beispiel derart:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{r(x,c)}{x-2}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to 2} r(x,c)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)} = \frac{0}{0},$$

so zeigt sich der nicht auswertbare Sonderfall $\frac{0}{0}$ (nicht definiert). Die Grenzwertsätze sind leider wegen der Division durch 0 nicht anwendbar.
Setzt man allerdings für c den Wert 12 ein, so findet der Rechner eine Zahl als Grenzwert.



[B 5.24]

Interpretation: Für den speziellen Anstiegswert $c=12$ konvergieren für $x \to 2$ die Werte des relativen Restterms

$$\frac{r(x,c)}{x-2}$$

zur Funktion f mit $f(x) := x^3$ gegen die Zahl 0. Die lineare Funktion l geht mit diesem Anstiegswert 12 an der Stelle $a=2$ in das lineare Taylorpolynom $l(x,12,2) \in L_2$ über.

Frage: Wie lässt sich der Grenzwert

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{r(x,12)}{x-2}\right) = 0$$

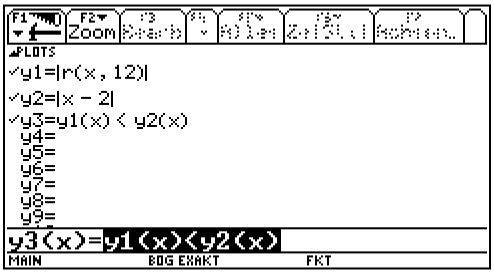
zur Funktion f plausibel erklären?

Annahme für den Grenzübergang $x \to 2$:
Der Zähler $r(x,12)$ konvergiert „schneller“ gegen die Zahl 0 als der Nenner $(x-2)$. Folglich muss es eine Umgebung um die Zahl 2 geben, in der **stets** gilt:

$$|r(x,12)| < |x-2|.$$

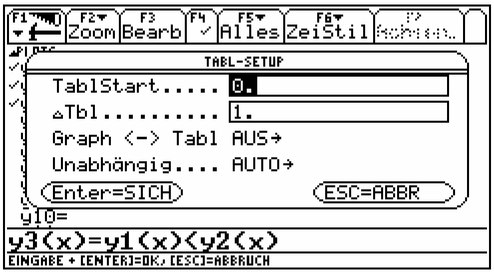
Eine grafisch-numerische Applikation soll uns den Grenzwertprozess numerisch veranschaulichen und insbesondere eine derartige Umgebung um die Zahl 2 demonstrieren.

Y=Editor/



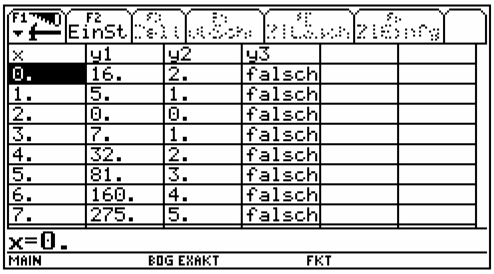
[B 5.25]

TBLSET/



[B 5.26]

TABLE/



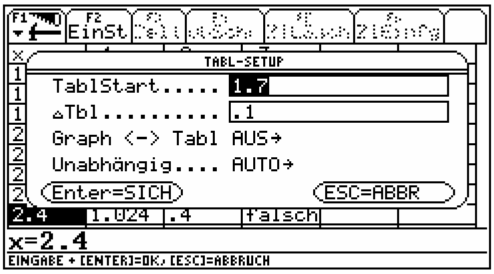
x	y1	y2	y3
0.	16.	2.	falsch
1.	5.	1.	falsch
2.	0.	0.	falsch
3.	7.	1.	falsch
4.	32.	2.	falsch
5.	81.	3.	falsch
6.	160.	4.	falsch
7.	275.	5.	falsch

x=0.

[B 5.27]

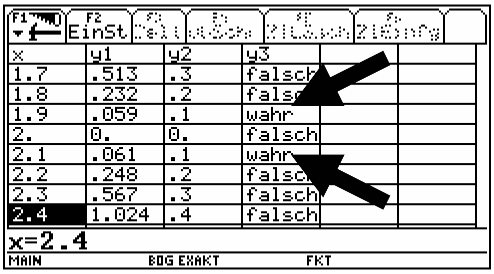
Interpretation: Bisher haben wir keine Umgebung um die Zahl 2 gefunden, in der stets gilt: $|r(x,12)| < |x-2|$.

TBLSET/



[B 5.28]

TABLE/



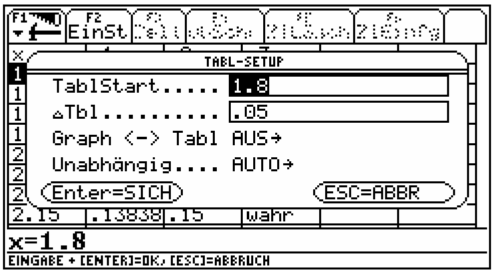
x	y1	y2	y3
1.7	.513	.3	falsch
1.8	.232	.2	falsch
1.9	.059	.1	wahr
2.	0.	0.	falsch
2.1	.061	.1	wahr
2.2	.248	.2	falsch
2.3	.567	.3	falsch
2.4	1.024	.4	falsch

x=2.4

[B 5.29]

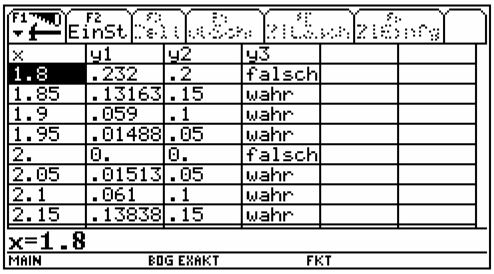
Interpretation: Eine Umgebung um die Zahl 2, in der gilt: $|r(x,12)| < |x-2|$, scheint es zu geben.

TBLSET/



[B 5.30]

TABLE/



x	y1	y2	y3
1.8	.232	.2	falsch
1.85	.13163	.15	wahr
1.9	.059	.1	wahr
1.95	.01488	.05	wahr
2.	0.	0.	falsch
2.05	.01513	.05	wahr
2.1	.061	.1	wahr
2.15	.13838	.15	wahr

x=1.8

[B 5.31]

Interpretation: Um die Stelle 2 gibt es offensichtlich eine Umgebung, in der numerisch gilt: $|r(x,12)| < |x-2|$.

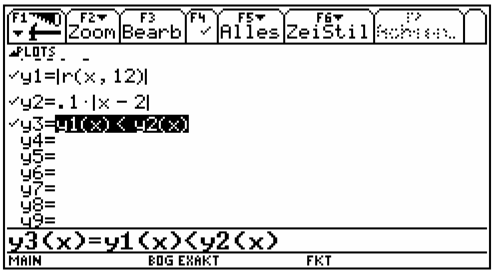
Auf numerischen Weg können wir leider nicht bestätigen, dass die Ungleichung **für alle** x-Werte aus dieser Umgebung richtig ist. Wir können aber das Gegenteil dieser Behauptung durch weitere numerische Tests nicht widerlegen. Folglich bleibt es bei einer Vermutung mit der Aussage: Der Restterm $r(x,12)$ nähert sich beim

Grenzwertübergang für $x \to 2$ in einer Umgebung der Zahl 2 betragsmäßig „schneller“ der Zahl 0, als es der Term $|x-2|$ je vermag.

Das Wesen dieser Vermutung bleibt auch dann prinzipiell erhalten, wenn man den Term $|x-2|$ mit einer positiven, kleinen Zahl ε, wie zum Beispiel mit $\varepsilon := 0.1$, multipliziert.
Es soll vermutlich ein kleineres Intervall um die Zahl 2 geben, in dem gilt: $|r(x,12)| < \varepsilon \cdot |x-2|$ (**).

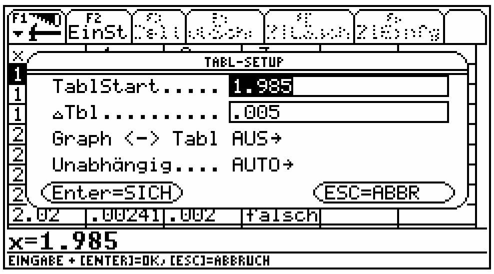
Wir suchen nach einer grafisch-numerischen Veranschaulichung. Im Y=Editor ändern wir für y_2 ab: $y2 := 0.1 \cdot |x-2|$ und verbinden damit die Vorstellung, dass die Werte des „neuen“ Terms $0.1 \cdot |x-2|$ aufgrund des kleineren Korrekturfaktors von 0.1 sich „schneller“ der Zahl 0 nähern als es die Werte des „alten“ Terms $|x-2|$ je getan haben.

Y=Editor/



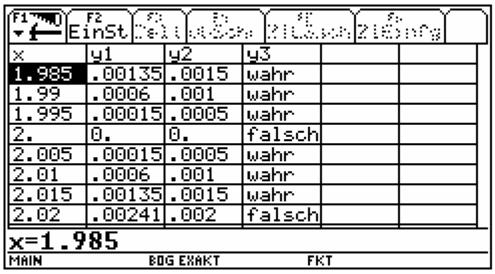
[B 5.32]

TBLSET/



[B 5.33]

TABLE/



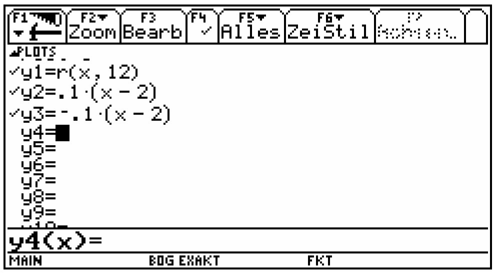
x	y1	y2	y3
1.985	.00135	.0015	wahr
1.99	.0006	.001	wahr
1.995	.00015	.0005	wahr
2.	0.	0.	falsch
2.005	.00015	.0005	wahr
2.01	.0006	.001	wahr
2.015	.00135	.0015	wahr
2.02	.00241	.002	falsch

[B 5.34]

Interpretation: Um die Stelle 2 gibt es offensichtlich eine Umgebung, in der numerisch gilt: $|r(x,12)| < 0.1 \cdot |x-2|$.

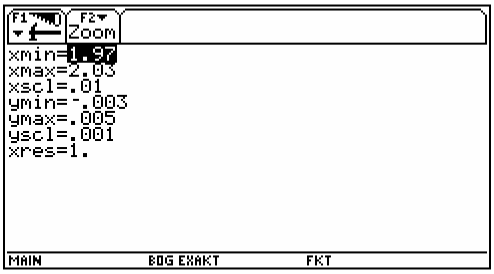
Der Korrekturfaktor 0.1 verkleinert zwar die rechte Seite der Ungleichung (**) ein wenig und steht somit für eine „schnellere“ Annäherung an die Zahl 0 als zuvor. Trotzdem bleibt es bei dem bereits oben beschriebenen „Schnelligkeitsverhältnis“ zwischen linker und rechter Seite von (**).
Zu einer geometrischen Interpretation und Veranschaulichung gelangt man mit der Einführung von zwei „ε-Trichtergeraden“ unter Verwendung der beiden linearen Terme in x: $\varepsilon \cdot (x-2)$ und $-\varepsilon \cdot (x-2)$. Für $\varepsilon := 0.1$ zeigt sich tatsächlich ein derartiges Intervall mit der Zahl 2 als inneres Element.

Y=Editor/



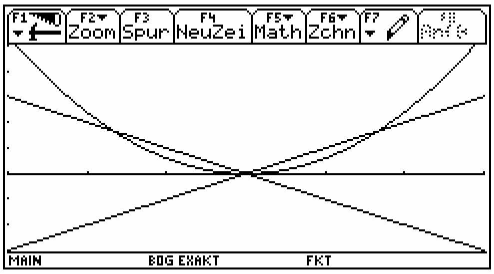
[B 5.35]

WINDOW/

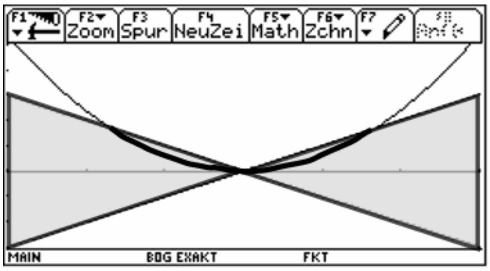


[B 5.36]

GRAPH/



[B 5.37 a]



(Grafische Aufbereitung)
[B 5.37 b]

Interpretation: In einer sehr kleinen Umgebung der Zahl 2 liegt ein Teil des Grafen der Restfunktion r im Inneren eines noch so schmalen „ε-Doppel-Trichters".
Übersetzt man diese geometrische Darstellungsweise in die exakte Fachsprache der Mathematik, so erhält man die Formulierung: Zu jedem Anstieg $\varepsilon > 0$, bezogen auf die beiden linearen Terme $\pm\varepsilon \cdot (x-2)$, existiert eine δ-Umgebung um die Zahl 2 mit $\delta > 0$, in der für alle $x \neq 2$ gilt:

$$|r(x,12)| < \varepsilon \cdot |x-2|$$

$$\left|\frac{r(x,12)}{x-2}\right| < \varepsilon.$$

Diese Aussage ist äquivalent zu

$$\lim_{x \to 2}\left(\frac{r(x,12)}{x-2}\right) = 0\,.$$

Übung 5.10

Zeigen Sie für die Funktion f mit $f(x) := x^3$ in einer grafisch-numerischen Applikation: Der Restterm $r(x,12)$ nähert sich beim Grenzwertübergang für $x \to 2$ in einer sehr kleinen δ-Umgebung der Zahl 2 auch dann betragsmäßig „schneller" der Zahl 0, als es der Term $(1/500) \cdot |x-2|$ je vermag. Geben Sie ein geeignetes δ an und begründen Sie Ihre Wahl.
Antwort: Zum Beispiel mit $\delta := 3/10000$.

Übung 5.11

Gegeben sei der Term $f(x) := 4 \cdot x^2$.
Welcher der beiden Restterme

$$rest1(x) := 4 \cdot x^2 + 40 \cdot x + 100$$

$$rest2(x) := -4 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100$$

gehört zu einem linearen Taylorpolynom der Funktion f mit der Entwicklungsstelle (-5)?

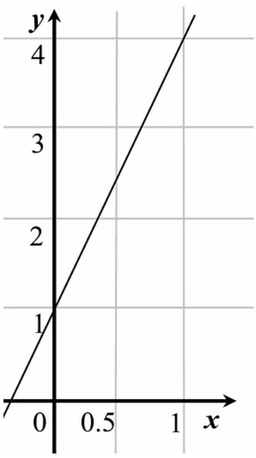
a) Entscheiden Sie mithilfe eines geeigneten Taylorbefehls.
b) Entscheiden Sie **ohne** Unterstützung eines Taylorbefehls. Begründen Sie.

6 Der Anstieg einer Sekante

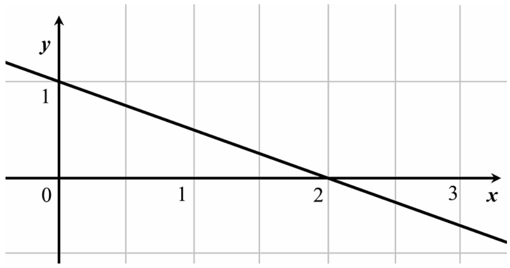
In der geschichtlichen Entwicklung der Differenzialrechnung spielte das so genannte Sekanten-Tangenten-Problem eine große Rolle. Die Behandlung von Taylorpolynomen ist historisch gesehen eine theoretische Weiterentwicklung dieses besonderen Problems.
In diesem Abschnitt wollen wir uns ausführlich mit den Begriffen der Sekante an einem Funktionsgrafen und dem Anstieg einer Sekante beschäftigen.
Wir beginnen mit einigen auffrischenden Übungen und Wiederholungen.

Übung 6.1

a) Geben Sie den Anstieg der in den Figuren [B 6.1 a] und [B 6.1 b] dargestellten Geraden an. Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg, ohne Unterstützung des Rechners.
b) Beschreiben Sie, wie man alleine mithilfe der GRAPH/Spur-Funktion den Anstieg einer Geraden im Grafenfenster bestimmen kann. Beziehen Sie sich dabei auf den Grafen der Funktion f im Bild [B 6.2 c].



[B 6.1 a]

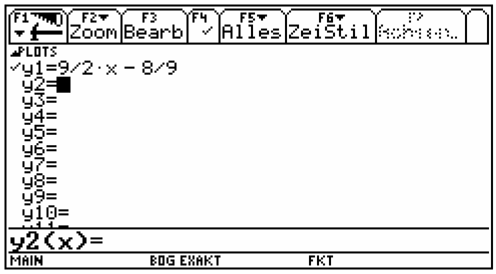


[B 6.1 b]

Grafisch-numerische Applikation zur Übung 6.1 b)

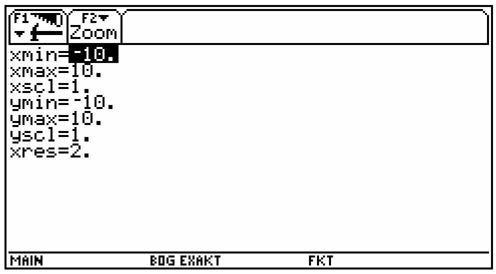
Gegeben: $f(x) := \frac{9}{2} \cdot x - \frac{8}{9}$

Y=Editor/



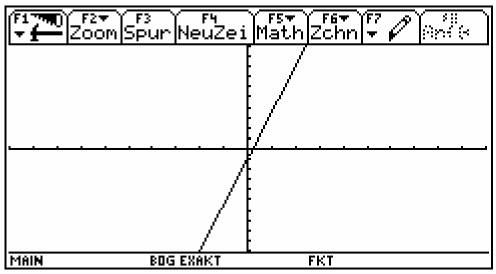
[B 6.2 a]

WINDOW/



[B 6.2 b]

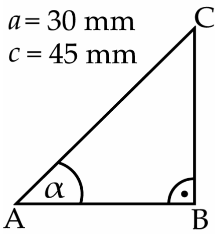
GRAPH/



[B 6.2 c]

Übung 6.2

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC.



Berechnen Sie die Größe des Winkels α aus den bekannten Seitenlängen a und c.

Antwort: $\alpha = 33.7°$

[B 6.3]

Wir führen den Begriff „Anstiegswinkel einer Geraden" ein.

Definition **D 02**

Unter dem Anstiegswinkel α einer Geraden g im kartesischen x-y-Koordinatensystem versteht man jenen Winkel, den die Gerade g mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

Kurz: $\alpha := \measuredangle(g, x^+)$ mit $0 \le \alpha < \pi$.

Zwischen dem Grafen einer linearen Funktion und dem Anstiegswinkel besteht eine trigonometrische Beziehung.

Satz **S 03**

Die Funktion f sei mit $f(x,m,n) := m \cdot x + n$ eine lineare Funktion in x. Dabei sind die Werte m und n bekannt. Der Graf von f sei die Gerade g im kartesischen x-y-Koordinatensystem. Für den Anstiegswinkel α der Geraden g gilt dann: $\tan(\alpha) = m$.

Wir beweisen den Satz S 03 und listen als Erstes unsere Beweismittel auf:

M1 Tangens im rechtwinkligen Dreieck:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{"Gegenkathete"}}{\text{"Ankathete"}}$$

M2 Komplementärwinkelbeziehung für den Tangens: $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

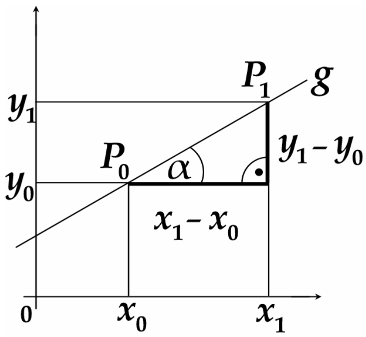
Beweisführung mittels Fallunterscheidung: Wir wählen auf der Geraden g zwei Punkte $P_0(x_0, y_0)$ und $P_1(x_1, y_1)$ mit $x_0 \ne x_1$ und unterscheiden dabei zwei Fälle:

Fall 1: $0 \le \alpha < \pi/2$ und

Fall 2: $\pi/2 < \alpha < \pi$

(Warum betrachten wir nicht den „3. Fall": $\alpha = \pi/2$?)

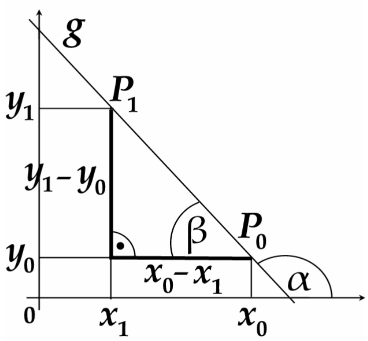
Zu Fall 1: $0 \le \alpha < \pi/2$:



[B 6.4]

M1: $\tan(\alpha) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Zu Fall 2: $\pi/2 < \alpha < \pi$: Dieser Fall entsteht beispielsweise nach Drehung der Geraden g um P_0.



[B 6.5]

M1: $\tan(\beta) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}$

Komplementärwinkel α, β: $\alpha = \pi - \beta$

M2:

$$\tan(\alpha) = -\tan(\beta) = -\frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

In beiden Fällen erhalten wir:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Wegen $y_1 = f(x_1) = m \cdot x_1 + n$ und $y_0 = f(x_0) = m \cdot x_0 + n$ gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{m \cdot x_1 + n - (m \cdot x_0 + n)}{x_1 - x_0} = \frac{m \cdot (x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m$$

In Worten: Der Anstieg m der Geraden g ist gleich dem Tangens des Anstiegswinkels α der Geraden g.

Definition **D 03**

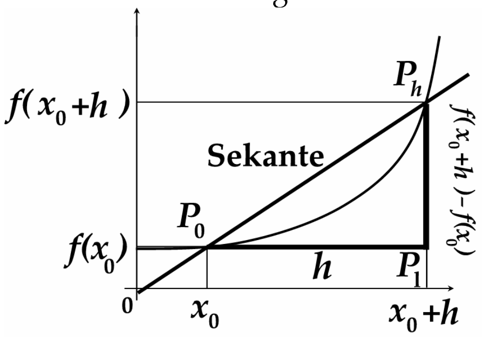
h sei eine von Null verschiedene reelle Zahl. f sei eine Funktion und mindestens im Intervall $I := [x_0, x_0 + h]$ definiert. Die Punkte P_0 und P_h mit $P_0(x_0, f(x_0))$ und $P_h(x_0 + h, f(x_0 + h))$ liegen auf dem Grafen von f. Die Gerade $s(P_0, P_h)$ bezeichnen wir dann als Sekante von f im Intervall I.

Bemerkung: Die reelle Zahl h kann positiv wie auch negativ sein, nur nicht gleich 0 und wird auch als Argumentzuwachs bezeichnet.

Übung 6.3

In der nachfolgenden Abbildung wird der Argumentzuwachs h positiv dargestellt. Skizzieren Sie sich ein ähnliches Bild für $h < 0$.

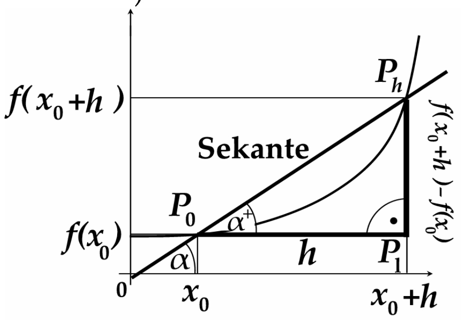
Grafische Darstellung für $h > 0$:



[B 6.6]

Der Anstieg der Sekante s, die durch die beiden Punkte P_0 und P_h bestimmt wird, berechnet sich dann über die im Bild [B 6.6] dargestellten Koordinaten aus dem Quotienten: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Wie man im nachfolgenden Bild sehen kann, gilt im rechtwinkligen Anstiegsdreieck $P_0 P_1 P_h$ für den Anstiegswinkel α mit $\alpha = \alpha^+$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen):



[B 6.7]

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Interpretation: Die Größe des Anstiegswinkels α der Sekante $s(P_0, P_h)$ zu f kann beeinflusst werden von der Stelle x_0

und von dem Argumentzuwachs h mit $h \neq 0$. Für diesen speziellen Zusammenhang definieren wir eine Funktion, namens Differenzenquotient, auch unter der Bezeichnung „mittlerer Anstieg" der Kurve im Intervall $I := [x_0, x_0 + h]$ geläufig.

Definition **D 04**

f sei eine Funktion. Die Punkte P_0, P_h liegen auf dem Grafen der Funktion f. Die Funktion f sei mindestens im Intervall $I := [x_0, x_0 + h]$ definiert. Die Funktion d heißt Differenzenquotient per Definition genau dann, wenn:

$$d(x_0, h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \textbf{mit } h \neq 0.$$

Geometrische Bedeutung von d: Die Funktion d gibt den Anstieg jener linearen Funktion an, die durch die Sekante $s(P_0,\ P_h)$ bestimmt wird.

Auftrag 6.1

f sei eine Funktion mit $f(x) := x^2 - 1$. Berechnen Sie die Anstiege und den Anstiegswinkel derjenigen Sekanten, die durch die Punkte: $P_0(1.5, f(1.5))$ und $P_h(1.5 + h,\ f(1.5 + h))$ mit $h \neq 0$ gehen. Dabei nimmt h nacheinander folgende Werte an:

a) 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001

b) -1, -0.1, -0.01, -0.001, -0.0001.

Lösung 6.1 a)

Geg.: $f(x) := x^2 \text{-} 1,\ h \in \mathbb{R}^*$
$P_0(1.5,\ f(1.5))$ und
$P_h(1.5 + h,\ f(1{:}5 + h))$ mit
$h := \{\ 1,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001\}$

Ges.: **(1)** Sekantenanstiege in Listenform
(2) Anstiegswinkel als Näherungswerte im Gradmaß, Angaben in Listenform

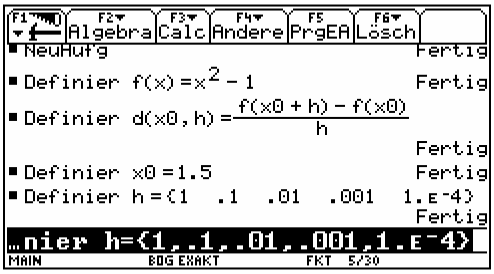
Lös. (1): Sekantenanstiege berechnen sich aus der Funktion d (Differenzenquotient):

$$d(x_0, h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{mit}$$

$h \neq 0$ und $x_0 := 1.5$.

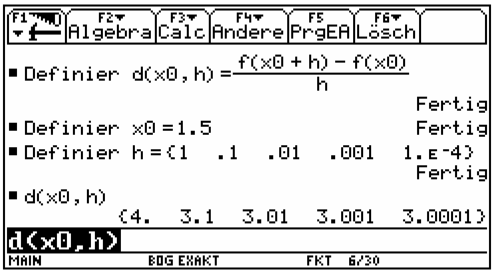
Hinweis: Stellen Sie im MODE-Menü wie in den Bildern von [B 1.1] bis [B 1.3] dargestellt, auf symbolischen Ausgabemodus um.

HOME/



[B 6.8]

Approximative Berechnung der Sekantenanstiege, Ausgabe erfolgt in Listenform:



[B 6.9]

Interpretation: Zu jedem Element der Liste h gibt es genau eine Sekante s und genau einen Sekantenanstieg m. Die Sekantenanstiege m in Listenform:

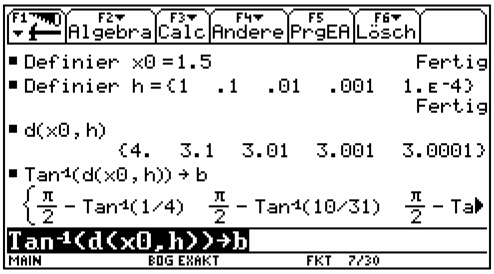
$$m := \{4, 3.1, 3.01, 3.001, 3.0001\}.$$

Berechnung der Anstiegswinkel in Listenform:

Lös. (2): Zuerst berechnen wir die exakten Anstiegswinkel im Bogenmaß und speichern diese Liste unter dem Namen b ab.

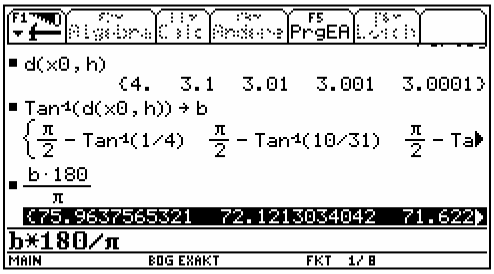
$$\tan(\alpha) = d(x_0, h)$$

$$\alpha = \tan^{-1}(d(x_0, h))$$



[B 6.10]

Um die Anstiegswinkel als Näherungswerte im Gradmaß zu erhalten, multiplizieren wir die Liste b mit dem Faktor $180/\pi$ und berechnen approximativ:



[B 6.11]

Interpretation: Zu jedem Element der Liste h gibt es genau eine Sekante s und genau einen Anstiegswinkel α. Die Anstiegswinkel in Listenform:

$$\alpha = \{76.0°, 72.1°, 71.6°, 71.6°, 71.6°\}$$

(auf eine Dezimalstelle nach dem Dezimalpunkt gerundet).

Übung 6.4

Lösen Sie am Rechner den Auftrag 6.1 b).

Auftrag 6.2

f sei eine Funktion mit $f(x) := x^2 + 1.5$. Die Gerade $s(P_0, P_h)$ sei eine Sekante von f mit $h \in \mathbb{R}^*$, $P_0(0.5, f(0.5))$ und $P_h(0.5+h, f(0.5+h))$.

a) Bestimmen Sie aus den Punktkoordinaten x und y eine Gleichung für die Sekante s.

b) Benennen Sie die darin enthaltenen Terme für den Sekantenanstieg und das absolute Glied.

c) Welche Besonderheit beschreibt die Sekantengleichung für $x = 0.5$?

d) Welche Beziehung besteht zwischen der Zahl h und der Sekante s, die aus der Sekantengleichung hervorgeht? Veranschaulichen Sie die Beziehung.

Lösung 6.2 a)

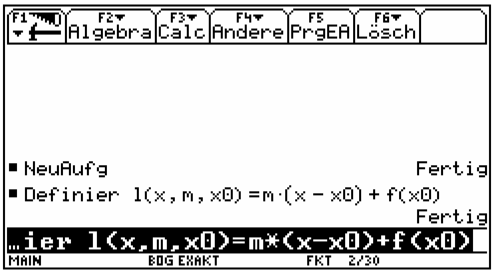
Geg.: $f(x) := x^2 + 1.5$
$P_0(0.5, f(0.5))$ und
$P_h(0.5+h, f(0.5+h))$ mit
$h \neq 0$.

Ges.: Gleichung für $s(P_0, P_h)$

Lös.: Eine Gerade, die durch den Punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ verläuft, gehört zu der Menge L_{x_0}.

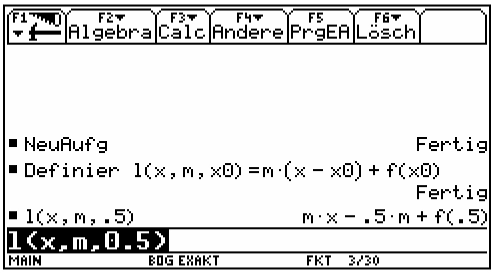
$$l(x, m, x_0) := m \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

HOME/



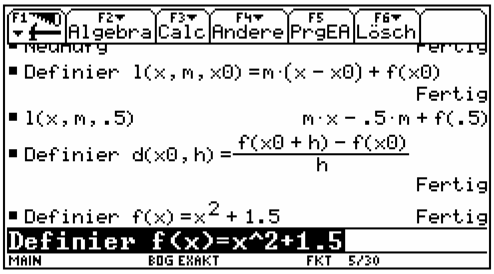
[B 6.12]

Wir belegen das dritte Argument x_0 in $l(x, m, x_0)$ mit der Zahl 0.5 und werten dann approximativ aus.



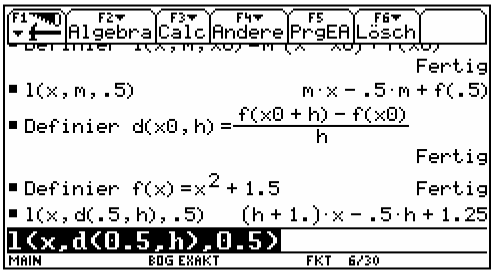
[B 6.13]

Wir erweitern die CAS-Applikation um die Funktionen d und f.



[B 6.14]

Mit der Funktion d können wir den Anstieg m der Sekante s näher bestimmen. Wir belegen im Term $l(x,m,x_0)$ die Parameter m und x_0.



[B 6.15]

Interpretation: Der Term $l\left(x,m,x_0\right)$ liefert an der Stelle $\left(x,\, d\left(0.5,h\right),\, 0.5\right)$ den Term:

$$(h+1)\cdot x-\frac{h}{2}+\frac{5}{4}.$$

Die Sekantengleichung in $x\in\mathbb{R}$ und $y\in\mathbb{R}$ ergibt sich dann mit $h\in\mathbb{R}^*$ aus:

$$y=l(x,d(0.5,h),0.5)$$

$$y=(h+1)\cdot x-\frac{h}{2}+\frac{5}{4}$$

Lösung 6.2 b)

Der Term $h+1$ kann als Anstieg der linearen Funktion l aufgefasst werden und $-\frac{h}{2}+\frac{5}{4}$ ist dann das zugehörige absolute Glied.

Lösung 6.2 c)

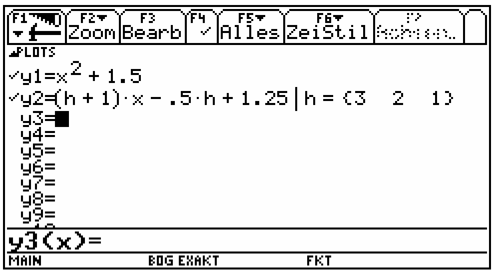
Für $y=(h+1)\cdot x-\frac{h}{2}+\frac{5}{4}\,\Big|\; x=0.5$ ergibt sich $y=1.75$. Alle Sekanten haben den gemeinsamen Punkt: $P_0(0.5,\ 1.75)$. (Überprüfen Sie diese Angaben.)

Lösung 6.2 d)

Zwischen h und s besteht folgende Beziehung: **Zu jeder Zahl h gibt es genau eine Sekante s.**

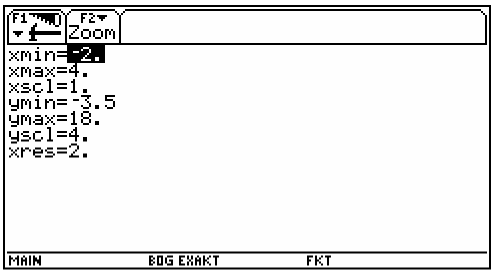
Wir veranschaulichen diesen wichtigen Zusammenhang mittels einer grafisch-numerischen Applikation. Der Parameter h durchläuft dabei nacheinander die Zahlen: 3, 2, 1 der gleichnamigen Liste.

Y=Editor/



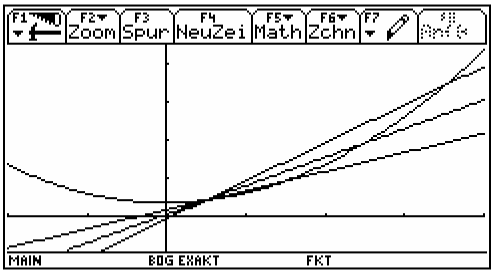
[B 6.16]

WINDOW/



[B 6.17]

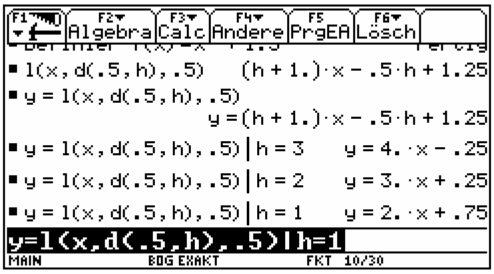
GRAPH/



[B 6.18]

Zusammenhang: „Argumentzuwachs – Sekantenanstieg - Gleichung für s“: Für Sekanten von f mit $f(x):=x^2+1.5$ gilt:

HOME/



[B 6.19]

Interpretation für $f(x):=x^2+1.5$

h	**Anstieg** m	**Gleichung der Sekante**
3	4	$y=4\cdot x-1/4$
2	3	$y=3\cdot x+1/4$
1	2	$y=2\cdot x+3/4$

Übung 6.5

Zu jeder Zahl h gibt es genau einen Anstiegswinkel α. Ordnen Sie in einer Tabelle jeder Zahl h aus {3, 2, 1} ihren Anstiegswinkel α_h zu.

7 Der Anstieg eines Grafen an der Stelle *a*

Wir sind nun mittels der Funktion d, dem Differenzenquotienten, in der Lage, Aussagen darüber zu machen, wie groß der **mittlere** Anstieg einer Kurve im Intervall $I:=[x_0,\ x_0+h]$ mit $h\neq 0$ ist. Der Verlauf der Kurve ist aufgrund des sich im Intervall I stets veränderlichen Anstiegs nur schwer zu beschreiben. Man müsste dazu wissen, wie groß der Anstieg einer Kurve **an einer Stelle** x_0 bzw. in einem Punkt P ist. Im Unterschied zu einem mittleren Anstieg einer Kurve spricht man in diesem Fall auch von einem **lokalen Anstieg** eines Funktionsgrafen **in** x_0.

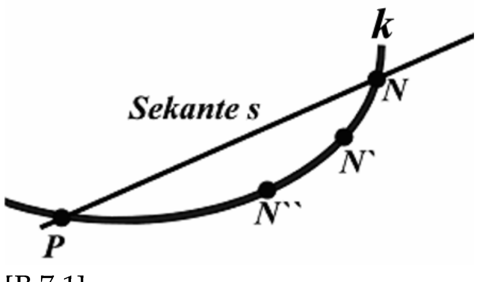
Eine Existenzaussage über den Anstieg einer Kurve in einem Punkt zu formulieren, bedeutet vor allem, das Intervall I, welches durch den Argumentzuwachs h beschrieben wird, sehr klein zu gestalten. So klein, dass eine Annäherung an den Punkt $P(x_0, f(x_0))$ erfolgt.

INFO | Sekantenfolge und Grenzgerade

Wie eine solche Annäherung an den Punkt P mit $P(x_0, f(x_0))$ vollzogen werden kann, überlegen wir an einem geometrischen Modell.

Geg.: Kurve k, fester Punkt P auf k, weiterer Punkt N auf k, N darf sich auf k „schrittweise“ hin und her bewegen.

Ges.: Anstieg m der Kurve k im Punkt P.



[B 7.1]

1. Berechnung des mittleren Anstiegs der Kurve k aus dem Anstieg der Sekante $s(P,N)$.
2. Der Punkt N bewegt sich „einen Schritt“ auf k in Richtung P zu. Der bewegliche Punkt N nimmt dann die Position von N' ein.
3. Berechnung des mittleren Anstiegs aus dem Anstieg der Sekante $s'(P, N')$.
4. Der Punkt N bewegt sich wieder „einen Schritt“ auf k in Richtung P zu. Der bewegliche Punkt N nimmt dann die Position von N'' ein.
5. Berechnung des mittleren Anstiegs aus dem Anstieg der Sekante $s''(P, N'')$.
6. Etc.

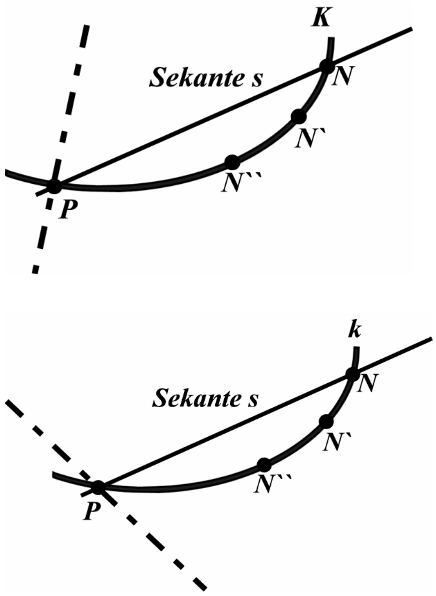
Wie nah soll und **wie nah darf** der Punkt N an den Punkt P herankommen, wenn man den Anstieg der Kurve k im Punkt P bestimmen möchte?

Wir untersuchen diesbezüglich erst einmal zwei gedanklich nahe liegende Fälle:

1. Fall: Der Punkt N bewegt sich „schrittweise“ auf den Punkt P zu, bis N die Position von P eingenommen hat.

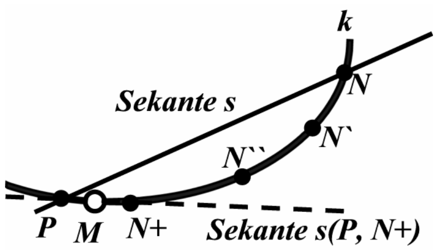
2. Fall: Der Punkt N bewegt sich schrittweise auf den Punkt P zu. N darf beliebig, nahe an P heran, erreicht aber dabei niemals die Position von P.

Zum ersten Fall: Wenn am Ende der schrittweisen Annäherung von N an P gilt: Der Abstand zwischen N und P ist gleich 0 (N liegt genau auf P), dann existiert keine Sekante mehr. (Warum nicht?) Folglich kann jede Gerade aus der Menge L_{x_0} zum festen Punkt P den Platz ausfüllen. (Begründen Sie diese Folgerung.) Damit gibt es unendlich viele solcher Geraden (strich-punkt-skizziert) und demzufolge auch unendlich viele Anstiege zu diesen Geraden. Der Kurve k kann somit kein eindeutiger Anstieg zugeordnet werden.



[B 7.2 a, b]

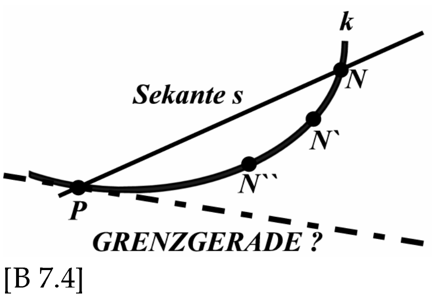
Zum zweiten Fall: Wenn am gedachten Ende einer schrittweisen Annäherung von N an P gilt: Der Abstand zwischen N und P ist größer 0 (N liegt nicht auf P), dann existiert stets eine Sekante. Da aber hier die Bedingung gilt: N darf beliebig, nahe an P heran, wird diese schrittweise Annäherung nie zu Ende sein. Denn es gibt immer wieder einen Punkt M, der einen noch geringeren Abstand zu P hat, als durch die Schrittbewegung von N zu erreichen ist (Dichtheit der Kurve k vorausgesetzt). Es gibt demnach unendlich viele Sekanten und folglich auch unendlich viele Sekantenanstiege. Auch in diesem Fall kann somit der Kurve k kein eindeutiger Anstieg zugeordnet werden.



[B 7.3]

Zusammengefasst: Mit diesen Annäherungen entstehen keine eindeutigen Aussagen über den Anstieg im Punkt P. Um dennoch zu einem zufrieden stellenden Ergebnis zu gelangen, zeichnet sich aus diesen beiden Fallbetrachtungen ein dritter möglicher Weg ab. Zum einen ist es erstrebenswert, den Anstieg der Kurve k aus dem Anstieg einer aus der Menge L_{x_0} stammenden Gerade festzulegen, da der Punkt P stets fest bleibt und nur lineare Funktionen an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches konstante Anstiege aufweisen. Zum anderen liegt uns mit dem Funktionsterm $d(x,h)$ für $h \to 0$ im Falle der Konvergenz von d ein eindeutiger Grenzwert vor, welcher dann den Anstieg der Grenzgerade angibt.
Damit ist das eigentliche Ziel, der Kurve k einen eindeutigen Anstieg im Punkt P zuweisen zu können, erreicht. Vor allem muss uns dabei bewusst sein, dass die Folge von Sekantenanstiegen **unendlich** ist und nur im Fall der **Konvergenz** einer solchen Sekantenanstiegsfolge eine Grenzgerade existent sein kann.

Fazit: Ohne Konvergenz von $d(x,h)$ für $h \to 0$ existiert keine Grenzgerade und somit auch kein lokaler Anstieg in P.
Die sich aus dieser allgemeinen Erörterung ergebende **Existenzfrage (Unter welcher Bedingung existiert für eine beliebige Funktion f in einem beliebigen Punkt P für $h \to 0$ ein Anstieg in P?)** ist damit hinreichend diskutiert.



[B 7.4]

Um das notwendige Verständnis für diesen wichtigen Zusammenhang („Konvergenz der Sekantenanstiegsfolge – Grenzgerade - lokaler Anstieg in P“) zu gewinnen, ziehen wir entsprechende Beispiele heran, an denen wir diese sehr allgemein beschriebene Idee im Konkreten schrittweise umsetzen und anwenden.

Anstieg einer Kurve im Punkt P_0:

Geg.: Graf der Funktion f mit $f(x) := x^2$, Stelle $x_0 := 0.5$.

Ges.: Anstieg des Grafen von f im Punkt $P_0(0.5, 0.5^2)$

Lös.:

(1) **Sekante** durch $P_0(0.5, 0.5^2)$, $P_h(0.5+h, (0.5+h)^2)$. Für jede Zahl h und $h \neq 0$ gibt es genau eine Sekante durch P_0 und P_h.

(2) **Anstieg der Sekante** durch P_0 und P_h mit $h \neq 0$ und der Funktion d:

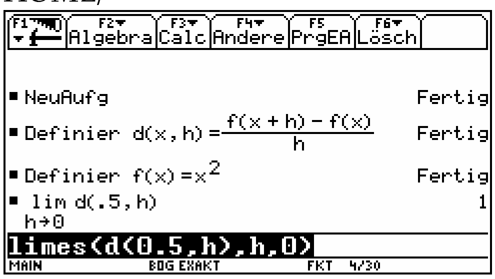
$$d(0.5,h) := \frac{(0.5+h)^2 - 0.5^2}{h} = \frac{h+h^2}{h} = 1+h$$

(3) **Grenzwert** für $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}(d(0.5,h)) = \lim_{h\to 0}(1+h) = 1$$

Wir kontrollieren die Rechnung:

HOME/



[B 7.5]

Anstieg der Kurve an der Stelle $x_0 := 0.5$

Der Rechner zeigt uns mit der Limesauswertung einen eindeutigen Wert, die Zahl 1. Es existiert offensichtlich ein eindeutiger Wert für den Anstieg der Grenzgeraden und mit dem eindeutigen Punkt P auch eine und nur eine Grenzgerade. Demzufolge können wir sagen: Der Graf (Parabel) der Funktion f hat an der Stelle $x_0 = 0.5$ den **Anstieg 1**.

Wir verallgemeinern, indem wir den Wert der Stelle x_0 durch eine Variable z mit $z \in \mathbb{R}$ ersetzen.

Geg.: Graf der Funktion f mit $f(x) := x^2$, Stelle $x_0 := z$ mit $z \in \mathbb{R}$.

Ges.: Anstieg im Punkt $P_0(z, z^2)$

Lös.:

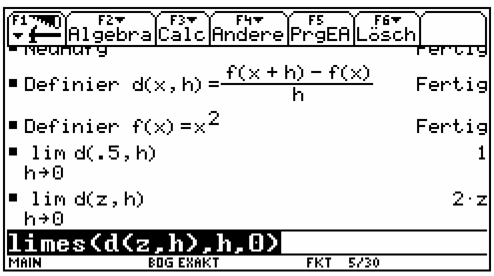
(1) **Sekante** durch $P_0(z, z^2)$, $P_h(z+h, (z+h)^2)$. Für jede Zahl h und $h \neq 0$ gibt es genau eine Sekante durch P_0 und P_h.

(2) **Anstieg der Sekante** durch P_0 und P_h mit $h \neq 0$ und der Funktion d:

$$d(z,h) := \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{z^2 + 2 \cdot z \cdot h + h^2 - z^2}{h} = 2 \cdot z + h$$

(3) **Grenzwert** für $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0}(d(z,h)) = \lim_{h \to 0}(2 \cdot z + h) = 2 \cdot z$$



[B 7.6]

Hinweis: Kontrollrechnungen sind keine Beweise. Bei Übereinstimmung entsprechender Ausgaben erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der ermittelten Angaben.

Anstieg der Kurve an der Stelle $x_0 := z$:
Der Graf (Parabel) der Funktion f mit $f(x) := x^2$ hat an der Stelle $x_0 := z$ den **Anstieg** $2 \cdot z$.

Wir verallgemeinern und parametrisieren auch den Funktionsterm $f(x)$.

Geg.: Graf der Funktion f mit $f(x) := g(x)$, Stelle $x_0 := z$

Ges.: Anstieg des Grafen von f im Punkt $P_0(z, g(z))$

Lös.:

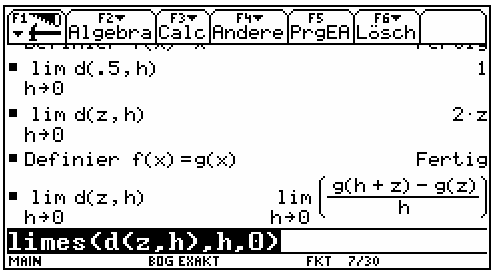
(1) **Sekante** durch $P_0(z, g(z))$, $P_h(z+h, g(z+h))$. Für jede Zahl h und $h \neq 0$ gibt es genau eine Sekante durch P_0 und P_h.

(2) **Anstieg der Sekante** durch P_0 und P_h mit $h \neq 0$ und der Funktion d:

$$d(z,h) := \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

(3) **Grenzwert** für $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0}(d(z,h)) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{g(z+h) - g(z)}{h}\right)$$



[B 7.7]

Interpretation: Die Existenz dieses Grenzwertes ist **nicht** gesichert, weil wir über die Berechenbarkeit der Funktion g nichts wissen.

Anstieg der Kurve in $x_0 := z$

Der Graf der Funktion g hat an der Stelle $x_0 := z$ den **Anstieg**

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\right),$$

falls dieser Limes genau eine reelle Zahl liefert, sonst nicht. Ausführlicher bedeutet diese Bedingung für die Funktion f: Nur in dem Fall, wenn die Folge der Sekantenanstiege (d_n) mit $n \in \mathbb{N}^*$ und

$$d_n := \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

für jede Nullfolge (h_n) mit $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ **ein und demselben Grenzwert** hat, gibt es eine **eindeutige Grenzlage** zu der Folge von unendlich vielen Sekanten.

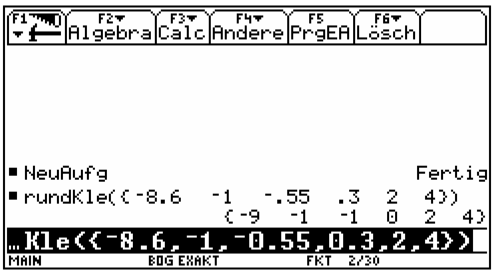
Auftrag 7.1

f sei die so genannte Gaußklammer-Funktion mit $f(x) := [x]$. Für jede reelle Zahl x bezeichnet dann $f(x)$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x. Stellen Sie fest, ob man für die Funktion f an der Stelle 3 über eine Folge von unendlich vielen Sekanten eine Grenzgerade für $h \to 0$ definieren kann oder nicht.

Lösung 7.1

In unserem Rechner ist der entsprechende Funktionsname für die Gaußklammer: rundKle aus dem MATH/Zahl/- Menü.

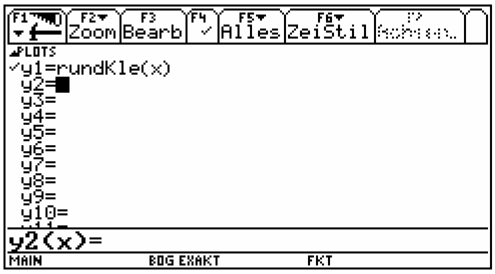
HOME/



[B 7.8]

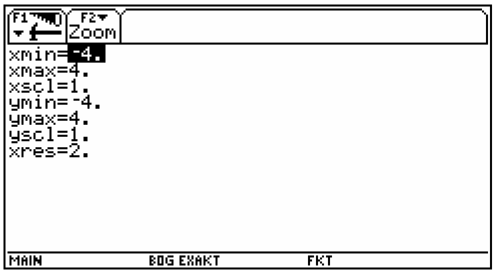
Hinweis: Den Befehlsnamen „rundKle“ kann man auch „Buchstabe für Buchstabe“ über die alphanumerische Tastatur eingeben: R U N D K L E (.

Y=Editor/



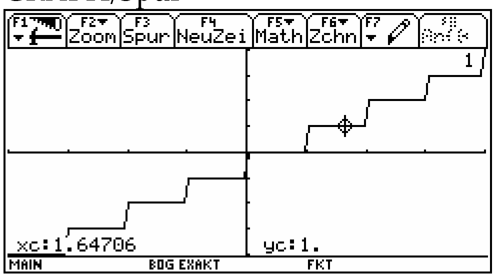
[B 7.9]

WINDOW/



[B 7.10]

GRAPH/Spur

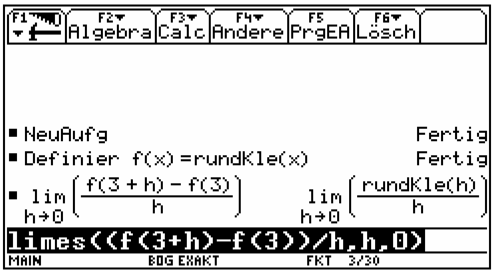


[B 7.11]

Interpretation: Über die GRAPH/Spur-Funktion kann festgestellt werden: $x-1 < \text{rundKle}(x) \leq x$.

Nun zur Überprüfung, ob eine Grenzgerade definiert werden kann oder nicht.

HOME/



[B 7.12]

Interpretation: Die Ausgabe des Rechners hilft uns nicht weiter. Vielleicht gibt es tatsächlich keine Grenzgerade.

Wir führen den Beweis:
Der Limes

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

stellt genau dann einen Grenzwert dar, wenn die Folge der Sekantenanstiege

$$\left(\frac{f(3+h_n)-f(3)}{h_n}\right)$$

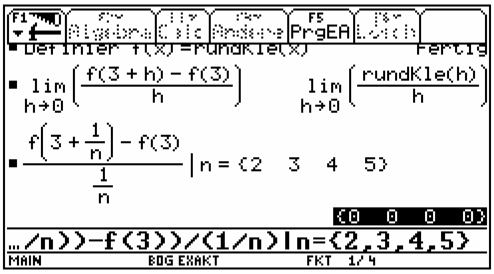
für jede beliebige Nullfolge (h_n) mit $h_n \neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$ die Konvergenz mit ein und demselben Grenzwert nachgewiesen werden kann. An zwei verschiedenen Testnullfolgen führen wir die Grenzwertberechnung probehalber durch. Unsere beiden Testnullfolgen sind:

$\left(\frac{1}{n}\right)$ und $\left(-\frac{1}{n}\right)$ mit $n\in\mathbb{N}^*$ und $n>1$.

Wir ersetzen h_n zuerst durch $\frac{1}{n}$.

$$\left(\frac{f(3+\frac{1}{n})-f(3)}{\frac{1}{n}}\right) \text{ mit } n>1$$

Den Anfang dieser Folge werten wir symbolisch aus.



[B 7.13]

Interpretation: Es entsteht eine Nullliste. **Vermutlich** stellt die Folge der Sekantenanstiege in diesem speziellen Fall eine konstante Folge, bestehend aus lauter Nullen, dar.

Begründung für alle $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$**:**

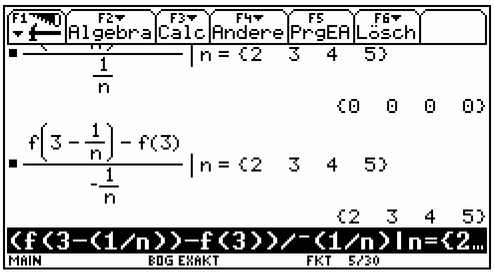
$$\frac{f(3+\frac{1}{n})-f(3)}{\frac{1}{n}} = \left(\left[3+\frac{1}{n}\right]-[3]\right)\cdot n$$

$$=(3-3)\cdot n$$

$$=0$$

Nun ersetzen wir h_n durch $-\frac{1}{n}$.

$$\left(\frac{f(3-\frac{1}{n})-f(3)}{-\frac{1}{n}}\right) \text{ mit } n>1$$



[B 7.14]

Interpretation: Es entsteht eine Liste mit den Zahlen 2, 3, 4 und 5.
Hier zeigt sich im Ergebnis, dass **vermutlich** die Folge der Sekantenanstiege in diesem speziellen Fall divergiert.

Begründung für alle $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ **:**

$$\frac{f(3-\frac{1}{n})-f(3)}{-\frac{1}{n}} = \left(\left[3-\frac{1}{n}\right]-[3]\right)\cdot(-n)$$
$$= (2-3)\cdot(-n)$$
$$= n$$

(Warum beginnt man im Hauptbildschirm ([B 7.13] und [B 7.14]) nach dem Mit-Operator nicht jeweils mit $n=1$?)

Wir fassen beide Teilergebnisse **zusammen**. Einerseits gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(3+\frac{1}{n})-f(3)}{\frac{1}{n}}\right)=0 \text{ und}$$

andererseits gilt aber auch:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(3-\frac{1}{n})-f(3)}{-\frac{1}{n}}\right)$$

existiert nicht (∞).

Da es bereits für die beiden speziellen Nullfolgen:

$\left(\frac{1}{n}\right)$ und $\left(-\frac{1}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ **keinen einheitlichen** Limeswert für

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(3+h_n)-f(3)}{h_n}\right)$$

gibt, besitzt die Folge von Sekanten an der Stelle 3 für $(h_n)\to 0$ keine Grenzgerade.

Übung 7.1

Gegeben sei eine Funktion f mit $f(x):=x^2-5\cdot x+6$.

Stellen Sie fest, ob man für die Funktion f an der Stelle (-5) über eine Folge von unendlich vielen Sekanten eine Grenzgerade für $h\to 0$ definieren kann oder nicht.

Diese Art der Untersuchung, ob für eine Funktion f an der Stelle a aus dem Inneren ihres Definitionsbereiches eine Grenzgerade für $h\to 0$ existiert oder nicht beantwortet auch in gleicher Weise die anders gestellte Frage:

Ist eine Funktion an der Stelle a differenzierbar oder nicht?

Die hier genannte Eigenschaft der Differenzierbarkeit einer Funktion an der Stelle a ist eine lokale Funktionseigenschaft, ähnlich wie die lokale Linearisierung einer Funktion an der Stelle a.

Wir definieren für reelle Funktionen diesen neuen und zentralen Begriff der Differenzialrechnung, wie folgt:

Definition **D 05**

f sei eine Funktion und h eine reelle Zahl mit $h\neq 0$. Es gelte weiterhin: $a\in D(f)$ und $a+h\in D(f)$. Die Funktion f ist an der Stelle a lokal differenzierbar per Definition genau dann, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert.

Bemerkungen:

a) Dieser Grenzwert kann auch über die Funktion d, den Differenzenquotienten, ausgedrückt werden.
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}d(a,h)$$

b) Setzt man die Definition Grenzwert einer Funktion an der Stelle a auf der Basis der Definition Folgen-Grenzwert um, dann gilt:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$$
für jede Nullfolge (h_n).

c) Findet man eine spezielle Nullfolge (h_n) für die der obige Limes entweder nicht existiert oder einen anderen Grenzwert erzeugt als für alle anderen Nullfolgen (h_n), dann ist die Nichtdifferenzierbarkeit einer Funktion an der Stelle a nachgewiesen.

d) Ohne Verwendung von h notiert sich der Limes so: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Unterteilt man die Zahl h mit $h \neq 0$ in $h < 0$ und $h > 0$, dann spricht man auch von „einseitiger" Differenzierbarkeit.

Definition **D 06**

f sei eine Funktion und in einer Umgebung von a definiert. Die Funktion f ist an der Stelle a linksseitig bzw. rechtsseitig differenzierbar per Definition genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textbf{bzw.}$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textbf{existiert.}$$

Zwischen diesen speziellen Begriffen und dem Begriff der lokalen Differenzierbarkeit besteht folgender Zusammenhang:

Satz **S 04**

Wenn eine Funktion f an der Stelle a lokal differenzierbar ist, dann ist die Funktion f an der Stelle a sowohl links- als auch rechtsseitig differenzierbar.

Übung 7.2

a) Beweisen Sie den Satz S 04.

b) Beweisen Sie, dass die Umkehrung von Satz S 04 nicht gilt.

c) Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung kann man im Falle von links- und rechtsseitiger Differenzierbarkeit von f in a auf Differenzierbarkeit in a schließen? Begründen Sie.

Der Anstieg einer Kurve (hier vereinfachend gleichgesetzt mit Graf einer Funktion) in einem Punkt bzw. an einer Stelle wird nun wie folgt definiert.

Definition **D 07**

f sei eine Funktion und an der Stelle a lokal differenzierbar. Die Funktion f hat an der Stelle a den Anstieg $m(a)$ mit

$$m(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Im Falle der lokalen Differenzierbarkeit in a existiert zu der Folge von Sekanten für $h \to 0$ und $h \neq 0$ eine eindeutige Grenzgerade. Man nennt sie Tangente von f an der Stelle a.

Der Begriff Tangente ist bereits im Zusammenhang mit einem Kreis bekannt. Doch äußerste Vorsicht gilt, wenn man aus gemeinsamen geometrischen Eigenschaften bestimmter Spezialfälle auf eine gemeinsame grafische Veranschaulichung dieses Begriffes schließt. Wir erfassen den Begriff Tangente in einer Definition, unabhängig von jeglicher Anschauung, rein analytisch.

Definition **D 08**

f sei eine Funktion und an der Stelle a lokal differenzierbar. Eine Gerade heißt Tangente der Funktion f an der Stelle a per Definition genau dann, wenn die Gerade durch den Punkt $P(a, f(a))$ verläuft und den Anstieg $m(a) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ hat.

Eine Tangente kann man natürlich auch durch eine Funktionsgleichung in Abhängigkeit von zwei Variablen beschreiben.

Übung 7.3

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) := x^2$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangenten an der Stelle a.

a) $a := 2$ (-2, 0)

b) $a := k$ mit $k \in \mathbb{R}$

Antwort zu b): $y = 2 \cdot k \cdot (x-k) + k^2,\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Wichtige Schreib- und Sprechweisen:
Statt $m(a) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ schreibt man in Lehrbüchern oft:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(gesprochen: „f Strich von a“)
oder

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(gesprochen: „*df* nach *dx* an der Stelle x gleich a“)
Häufig sagt man zu diesem speziellen Grenzwert **erste Ableitung von f an der Stelle a**. Oder auch **Differenzialquotient an der Stelle a**.

Hinweis: Man beachte den wesentlichen Unterschied zwischen den Wörtern:
- Differen**zen**quotient (spezielle Funktion)
- Differen**zial**quotient (spezielle Zahl).

INFO	Die Tangente approximiert am besten von allen Geraden in a.

Was bedeutet diese Kurzaussage?

Die Existenz einer Tangente ist gleichzusetzen mit der Existenz eines linearen Taylorpolynoms. Die Tangente erfüllt mit ihrem Anstieg $m(a)$ die Minimalitätseigenschaft aus Satz S 02:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - l(x,c,a)}{x-a} \right) = 0 \quad \text{und}$$

$$l(x,c,a) := c \cdot (x-a) + f(a) \in L_a$$

Nach dem Einsetzen ergibt sich dann:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - c \cdot (x-a) - f(a)}{x-a} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a) - c \cdot (x-a)}{x-a} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c \right) = 0 \,.$$

Drückt man die darin enthaltene Variable x durch h aus ($x := a+h$ und $h \neq 0$), dann gilt:

$$\lim_{a+h \to a} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c \right) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) - \lim_{h \to 0} (c) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) - c = 0$$

$$m(a) = c$$

Nimmt man an, die Minimalitätseigenschaft sei das entscheidende Kriterium für die beste lineare Approximation in a, dann kann festgestellt werden: Von allen Elementen aus L_a approximiert das lineare Taylorpolynom in a (gleichzusetzen mit der Tangente in a) die Funktion f in einer Umgebung der Stelle a am besten.

Die beiden unabhängigen Existenzfragen:

(1) Unter welcher Bedingung besitzt eine Menge L_a einer Funktion f ein lineares Taylorpolynom?

(2) Unter welcher Bedingung existiert für eine beliebige Funktion f in einem beliebigen Punkt P für $h \to 0$ ein Anstieg in P?

können gleichermaßen beantwortet werden.

Bedingung für beide Existenzfragen: Die Funktionswerte der Funktion f müssen sich in einer Umgebung der Stelle a durch die so genannte **Weierstraß`sche Zerlegungsformel** beschreiben lassen.
Wir leiten diese berühmte Formel **her**.
Gegeben sei eine Tangente t zur Funktion f an der Stelle a. Nach der Definition D 08 gilt somit

$$f'(a) = m(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

oder, mit $x = a + h$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Wir formen um:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0.$$

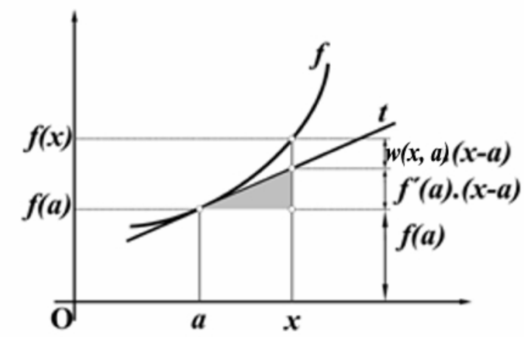
Setzen wir:

$$w(x,a) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a),$$

wobei $\lim_{x \to a} w(x,a) = 0$ vorausgesetzt wird.
Mit der Einführung des Terms $w(x,a)$ folgt dann die berühmte Gleichung:

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + (x-a) \cdot w(x,a)}$$

namens **Weierstraß`sche Zerlegungsformel** (kurz WZF; Karl Theodor Weierstraß, deutscher Mathematiker, lebte vom: 31.10.1815 bis 19.02.1897).



[B 7.15]

Unmittelbar folgt nach beidseitiger Grenzwertbetrachtung für $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + (x-a) \cdot w(x,a))$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Interpretation: Die Grenzwertbildung einer Funktion f für $x \to a$ ist im Falle der Konvergenz der Funktion f mit der Funktionswertberechnung an der Stelle a gegeneinander austauschbar.
Dieses wichtige Ergebnis halten wir fest in einem Satz.

S a t z **S 05**

Jede in a lokal differenzierbare Funktion f ist an gleicher Stelle auch stetig.

Eine **notwendige** Bedingung für die lokale Differenzierbarkeit einer Funktion ist die Eigenschaft der Stetigkeit an einer Stelle der betreffenden Funktion. Wir setzen an dieser Stelle die Begriffsinhalte der lokalen Stetigkeit und des Grenzwertes einer Funktion voraus.

Übung 7.4

a) Was bedeutet die Aussage: Eine Funktion f ist in a stetig.
b) Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass die Umkehrung des Satzes S 05 nicht gilt.
c) Bilden Sie die Kontraposition des Satzes S 05 und prüfen Sie deren Wahrheitsgehalt.

Übung 7.5

a) Interpretieren Sie die WZF, wenn der „letzte Summand“ $(x-a) \cdot w(x,a)$ vernachlässigt wird.
b) Zu welchem Term in diesem Buch ist der Term $(x-a) \cdot w(x,a)$ äquivalent?

c) Diskutieren Sie die Formel $f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + w(x,a)$ mit $\lim\limits_{x \to a} w(x,a) = 0$.

Übung 7.6

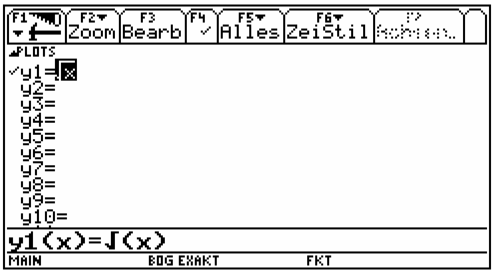
Erläutern Sie an einem Beispiel, wie man die WZF für die lineare Approximation sinnvoll nutzen kann und welche Rolle im Falle der lokalen Linearisierung einer Funktion, der Term $(x-a) \cdot w(x,a)$ zwangsläufig übernimmt?

Auftrag 7.2

a) Interpretieren Sie den Grafenverlauf der Funktion f mit $f(x) := \sqrt{x}$ insbesondere in einer kleinen Umgebung der Stelle 0.
b) Zeichnen Sie an den Funktionsgrafen von f die Tangenten (falls vorhanden) an den Stellen 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001 und 0 ein. Entwickeln Sie eine Tabelle mit dem dreispaltigen Kopf: [Stelle, Tangentengleichung, Anstieg]. Interpretieren Sie die ausgefüllte Tabelle.
c) Warum ist die Funktion f an der Stelle 0 nicht differenzierbar?
d) Ist f an der Stelle 0 stetig? Kann man für diesen Nachweis die WZF verwenden? Inwieweit kann für den Stetigkeitsnachweis der Rechner eingesetzt werden?

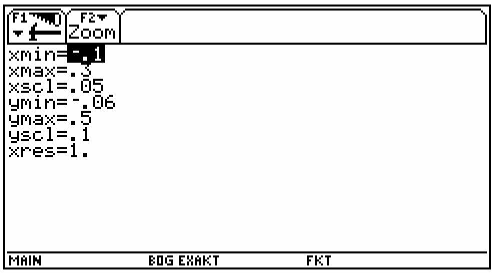
Lösung 7.2 a)

Y=Editor/



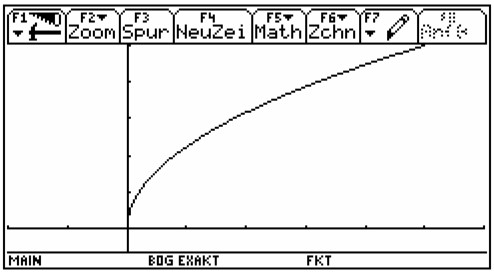
[B 7.16]

WINDOW/



[B 7.17]

GRAPH/



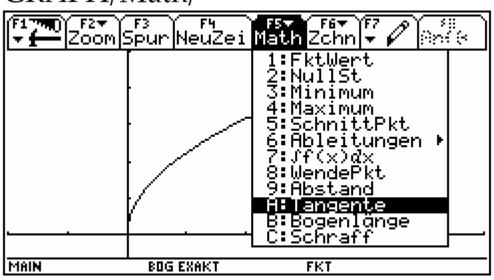
[B 7.18]

Interpretation: Die Funktion ist für $x \geq 0$ definiert. Der Graf ist augenscheinlich überall stetig und ist streng monoton wachsend. Die Umgebung zur Null ist rechtsseitig. Im Punkt $P(0,0)$ entspringt der Graf sehr steil und wird dann für zunehmende Argumente flacher.

Lösung 7.2 b)

Aus dem Untermenü GRAPH/Math/ benutzen wir die Option „Tangente“.

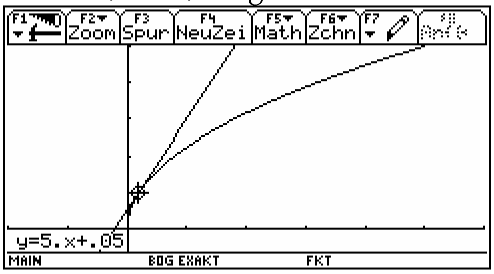
GRAPH/Math/



[B 7.19]

Nach Eingabe der ersten Stelle 0.01 zeigt der Rechner links unten die Gleichung der Tangente.

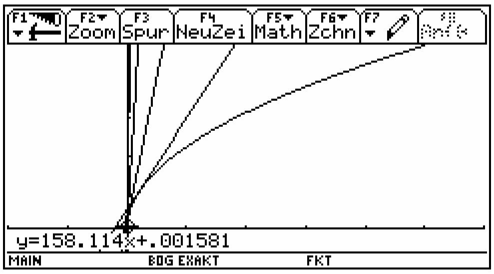
GRAPH/Math/Tangente



[B 7.20]

Interpretation: Für $x_1 := 0.01$ gilt in guter Näherung: $y_t = 5 \cdot x + 0.05$.

In gleicher Art und Weise zeichnen wir die Tangenten an den anderen Stellen zunächst ohne die Null ein.



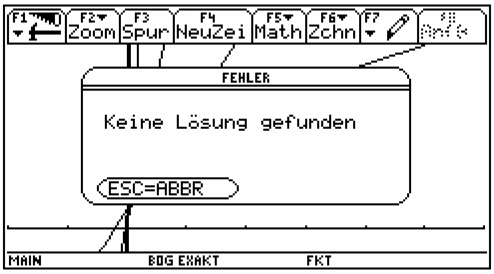
[B 7.21]

Wir entwickeln aus den einzelnen Bildschirmdarstellungen die nachfolgende Tabelle:

Stelle	Tangentengleichung	Anstieg
0.01	$y_t = 5 \cdot x + 0.05$	5
0.001	$y_t = 15.8 \cdot x + 0.0158$	16
0.0001	$y_t = 50 \cdot x + 0.005$	50
0.00001	$y_t = 158.1 \cdot x + 0.0016$	158
0	?	?

Interpretation: Je näher man von rechts (gedanklich an der Zahlengeraden) an die Stelle 0 heranrückt, desto steiler verlaufen die Tangenten. Die lokalen Kurvenanstiege verhalten sich entsprechend wie die Tangentenanstiege.

Speziell an der Stelle 0 zeigt der Rechner die folgende Meldung:



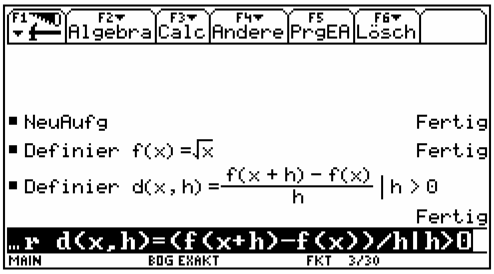
[B 7.22]

Wir fragen und vermuten: Lässt sich an der Stelle 0 überhaupt eine Tangente finden? Ist es die y-Achse selbst?

Lösung 7.2 c)

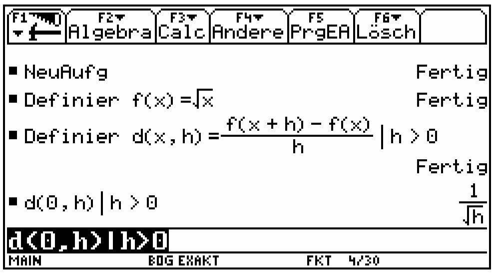
Wir legen eine CAS-Applikation an, um Argumente für unsere Vermutung zu sammeln.

HOME/



[B 7.23]

Wir spezifizieren unsere Frage von oben: Welchen Wert liefert der Rechner für den „eingeschränkten“ Differenzenquotienten $d(x,h)|h>0$ an der Stelle 0?

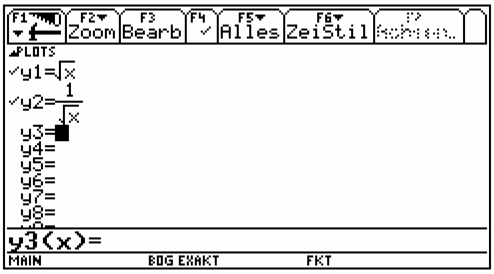


[B 7.24]

Interpretation: Der Rechner liefert den Term $\frac{1}{\sqrt{h}}$.

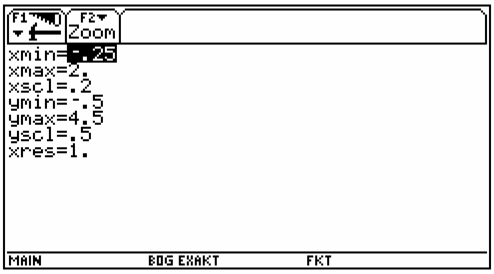
Von diesem Term machen wir uns zunächst ein Bild, indem wir den Buchstaben h durch x ersetzen und die letzte grafisch-numerische Applikation (siehe Bild [B 7.16]) erweitern:

Y=Editor/



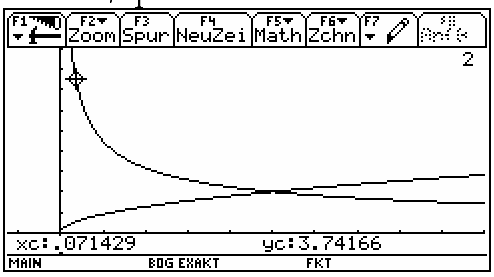
[B 7.25]

WINDOW/



[B 7.26]

GRAPH/Spur



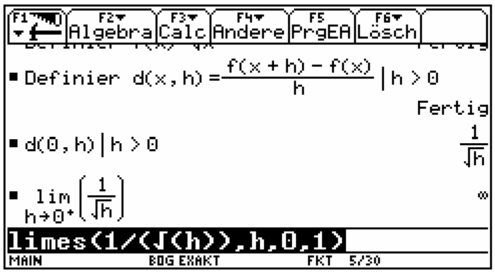
[B 7.27]

Interpretation: Die Termwerte von $1/\sqrt{h}$ (Spur vom zweiten Grafen) wachsen bei rechtsseitiger Annäherung an die Zahl 0 unbeschränkt.
Erweitern wir die zuletzt angelegte CAS-Applikation (siehe Bild [B 7.24]) um den rechtsseitigen Limes

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right),$$

so erhalten wir mit entsprechender Syntax:

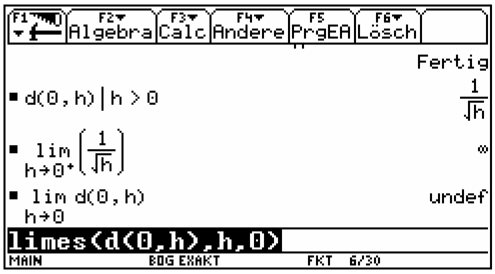
HOME/



[B 7.28]

Interpretation: Der obige Limes liefert mit dem Zeichen für Plus-Unendlich **keine** Zahl. Es gibt an der Stelle 0 für die Funktion f keinen Anstieg und somit auch keine Tangente. Die Funktion f ist an dieser Stelle nicht differenzierbar.

Begründung: Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}$ für $h \to 0$ ist nicht existent. Der Rechner bestätigt uns dies:



[B 7.29]

Argumentation: Eine mögliche Gegenposition wäre zum Beispiel: Die y-Achse könnte der Anschauung nach die Tangente in 0 sein. Dieser Standpunkt ist dennoch nicht haltbar, da auf der y-Achse keine „y-Gerade" als Funktion dargestellt werden kann. Eine Funktion muss stets eine eindeutige Zuordnung sein, was aber in diesem Fall nicht zutreffend ist.
Einfacher und schneller könnte die Nichtdifferenzierbarkeit an der Stelle 0 nachgewiesen werden, wenn man die beiden neuen Begriffe der links- und rechtsseitigen Ableitungen verwenden würde.

Satz **S 06**

Eine Funktion f ist an der Stelle a genau dann differenzierbar, wenn sie in a sowohl links- als auch rechtsseitig differenzierbar ist und die links- und rechtsseitigen Ableitungen von f in a übereinstimmen.

Lösung 7.2 d)

Ist f an der Stelle 0 stetig?

Anschaulich betrachtet lässt sich der Quadratwurzelgraf, beginnend im Koordinatenursprung, ohne Absetzen mit einem Bleistift zusammenhängend zeichnen. Wir können daher **vermuten**: Die Funktion f ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich und damit auch in 0 stetig.

Wir suchen nun nach einem **Nachweis**, der von jeglicher **Anschauung unabhängig** ist.

Erste Überlegung: Kann man für diesen Nachweis die WZF verwenden? Die WZF ist nur dann anwendbar, wenn an der Stelle a eine Tangente existiert. Deshalb müssen wir bei dem Stetigkeitsnachweis auf diese Formel verzichten, da die Funktion f in 0 nicht differenzierbar ist.

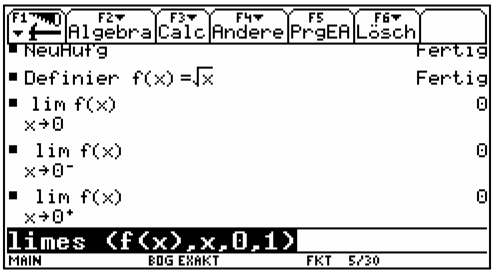
Zweite Überlegung: Inwieweit kann der Rechner für den Nachweis eingesetzt werden? Ein Einsatz für den Rechner käme nur dann in Frage, wenn die Eingaben zu symbolischen Ausgaben führen, die dann auch im Einklang mit entsprechenden Definitionen und Sätzen zu exakten Ergebnissen interpretiert werden können.

Dritte Überlegung: Welche Definitionen oder Sätze zur lokalen Stetigkeit ziehen wir heran? Wir wiederholen die Definition: Eine Funktion f heißt stetig an einer inneren Stelle $a \in D(f)$ per Definition genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Vergleichen Sie auch mit der Übung 7.4 a).

Unter Verwendung des Rechners entstehen mit folgender CAS-Applikation die symbolischen Ausgaben:

HOME/



[B 7.30 a]

Voreilig wäre die Interpretation: Die Stetigkeit der Funktion f an der Stelle 0 liegt vor. Man betrachte insbesondere die letzten beiden Ein- und Ausgaben kritisch.

Wir wissen: Es gibt keinen linksseitigen Grenzwert für $x \to 0$, da f nur für alle $x \in \mathbb{R}_+$ definiert ist. Dagegen ist der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Aus diesem Beispiel können wir exemplarisch lernen:

> Jede Rechnerausgabe ist vom Benutzer kritisch zu hinterfragen. Die Interpretation einer Ausgabe führt in dem Fall zu einem nicht zulässigen Ergebnis, wenn Ein- und Ausgaben im Widerspruch zur Theorie stehen (Grenzen eines CAS).

Zurück zu dem Bild [B 7.30 a] und stellen uns die Frage: Wieso zeigt der Rechner diese Ausgaben, die zu widersprüchlichen Ergebnissen führen können, an?

Übung 7.7

Was bedeutet die Aussage: Eine Funktion f hat in $a \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert.

Wir wissen die Grenzwertdefinition für Funktionen setzt einen punktierten Umgebungsbegriff für die Stelle a voraus. Da nach der Stetigkeitsdefinition a ebenfalls zum Definitionsbereich gehören muss, muss die punktierte Umgebung von a, inklusive a im gesamten Definitionsbereich, eingebettet sein. Die Stelle a ist im Rechner allerdings nicht als Häufungspunkt symbolisch darstellbar. Diese grundlegende Eigenschaft von Grenzwerten wird im Rechner **nicht** adäquat widergespiegelt. Wir sind somit an eine Grenze von CAS-Rechnern gestoßen. Es ist also bei der Interpretation von symbolischen Limesausgaben Vorsicht geboten.

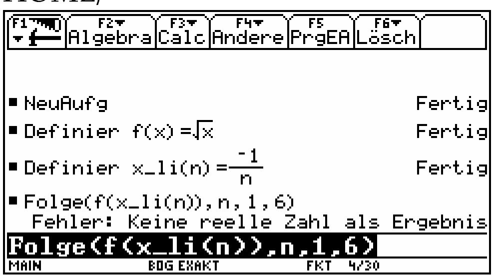
Ergebnis: Die Funktion f ist in 0 insofern stetig, weil sie rechtsseitig stetig ist und nur für $x \in \mathbb{R}_+$ definiert ist.

Übung 7.8

a) Was versteht man unter links- und rechtsseitiger Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle $a \in D(f)$?

b) Übernehmen Sie die folgende CAS-Applikation.

HOME/



[B 7.30 b]

Interpretieren Sie die letzte Ausgabe. Welchen Schluss können Sie für die vorletzte Auswertung aus Bild [B 7.30 a] ziehen? Testen Sie mit einer ähnlichen CAS-Applikation die letzte Auswertung aus Bild [B 7.30 a].

c)

[B 7.30 c]

Interpretieren Sie alle Ausgaben.

d) Testen Sie die Aussagen mit und ohne Rechner:

(I) Für alle $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

(II) Für alle $x \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

(III) Für alle $x \in \mathbb{R}_-$: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Ziehen Sie eine Schlussfolgerung zum sinnvollen Umgang mit dem Rechner.

Als **strategische Überlegung** halten wir fest:

Eine Grundvoraussetzung für den sinnvollen Umgang mit Rechnern: Nur wer die mathematische Theorie tatsächlich **beherrscht**, kann den Rechner für sich persönlich sinnvoll einsetzen und anwenden.

Auftrag 7.3

Untersuchen Sie die Funktionen f und g im Punkt (1/1) unter Verwendung von Satz S 06 auf Differenzierbarkeit.

a) $$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ x^3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

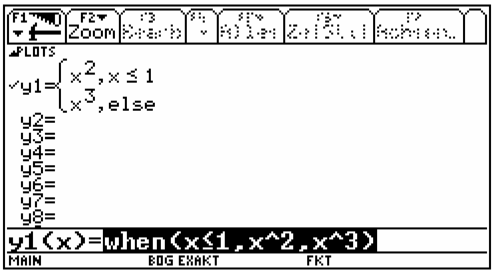
b) $g(x) := (x-1) \cdot |x-1|$

Lösung 7.3

Zu Beginn führen wir eine anschauliche Voruntersuchung an einer grafisch-numerischen Applikation durch, um so eine Vermutung aufstellen zu können. Anschließend versuchen wir, diese Vermutung unabhängig zur Anschauung zu beweisen. Dazu ziehen wir den Satz S 06 heran.

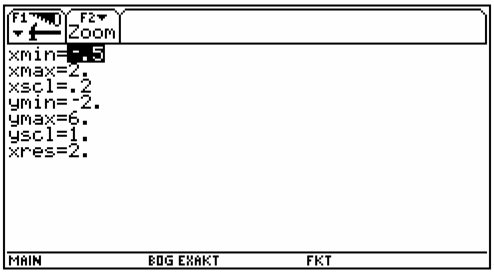
Lösung 7.3 a)

Y=Editor/



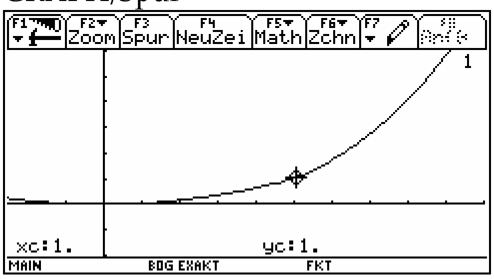
[B 7.31]

WINDOW/



[B 7.32]

GRAPH/Spur

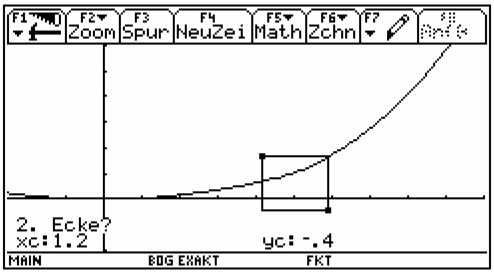


[B 7.33]

Interpretation: Im Punkt (1/1) können wir nichts Auffälliges sehen.

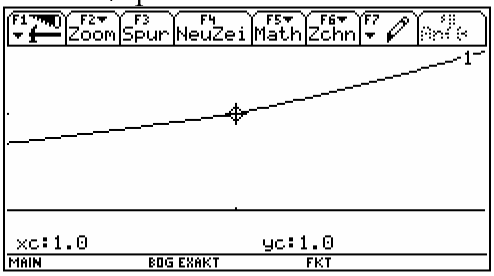
Folgerung: Es ist ratsam, einen vergrößerten Bildausschnitt vorzunehmen, um den Prozess für eine Linearisierung im „Kleinen" einzuleiten.

GRAPH/Zoom/ZoomBox



[B 7.34]

GRAPH/Spur



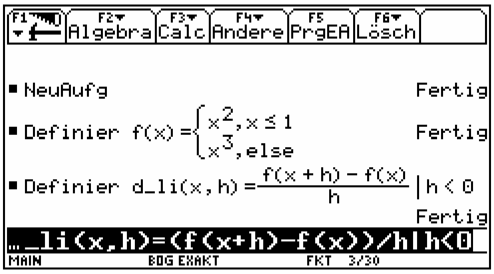
[B 7.35]

Interpretation: Im Punkt (1/1) sehen wir einen Knickpunkt. Der Anstieg der zusammengesetzten Funktion f ändert sich an dieser Stelle sprunghaft.

Vermutung: Die Funktion f ist im Punkt (1/1) nicht differenzierbar, denn sie ist an gleicher Stelle nicht lokal linearisierbar.

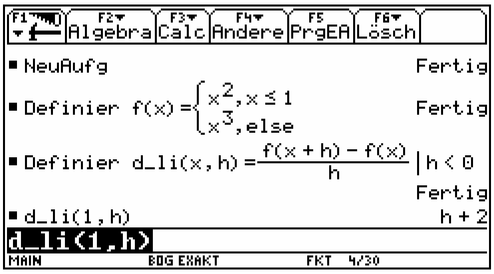
Wir entwerfen mit dem Rechner Teile des Beweises.

HOME/



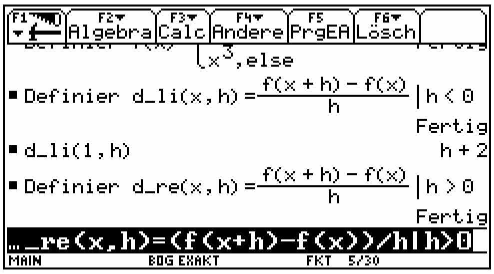
[B 7.36]

An der Stelle 1 berechnen wir den Funktionswert des linksseitigen Differenzenquotienten d_li für $h < 0$.



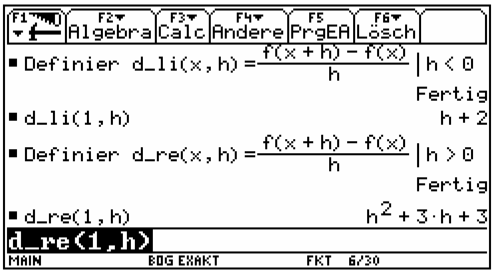
[B 7.37]

Wir erweitern unsere CAS-Applikation um die Definition des rechtsseitigen Differenzenquotienten d_re für $h > 0$.



[B 7.38]

Wir berechnen d_re an der Stelle 1.



[B 7.39]

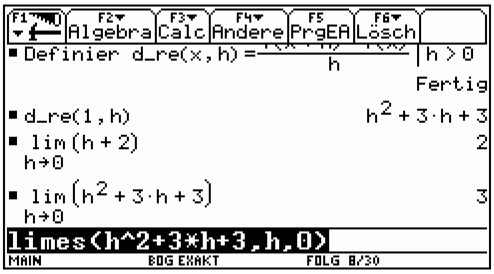
Interpretation: Für die Funktion f mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ x^3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

gilt in einer Umgebung der Zahl 1:

$$d(1,h) = \begin{cases} h+2 & \text{für } h < 0 \\ h^2 + 3\cdot h + 3 & \text{für } h > 0 \end{cases}$$

Mittels Limesberechnungen untersuchen wir die Funktion f an der Stelle 1 auf links- und rechtsseitige Differenzierbarkeit.



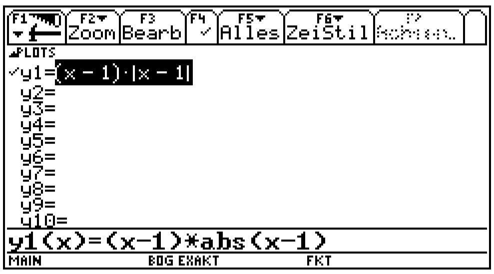
[B 7.40]

Schlussfolgerung nach Satz S 06: Ihre links- bzw. rechtsseitigen Ableitungen betragen 2 und 3 und stimmen demzufolge nicht miteinander überein. Die Funktion f ist an der Stelle 1 daher nicht differenzierbar.

Lösung 7.3 b)

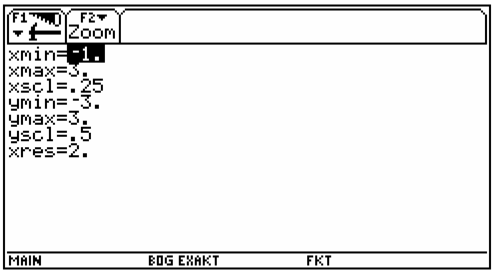
Auch innerhalb einer grafisch-numerischen Applikation kann man der Frage nach der lokalen Differenzierbarkeit nachgehen, allerdings benutzt man hierbei im Allgemeinen ein numerisches Ableitungsverfahren. Dabei ist unbedingt zu beachten, dass ein numerisches Ableitungsverfahren in Einzelfällen auch zu anderen Ergebnissen führen kann, wie es mit dem in der Definition D 05 festgelegten Begriff für lokale Differenzierbarkeit geregelt ist. Dennoch macht es in vielen Fällen Sinn, einen derartigen numerischen Test zur Bildung einer Vermutung durchzuführen.

Y=Editor/



[B 7.41]

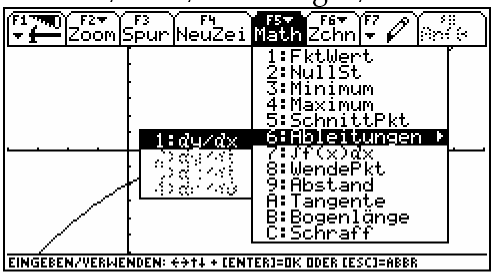
WINDOW/



[B 7.42]

Wir rufen im GRAPH/Math/-Menü den Befehl der numerischen Ableitung auf.

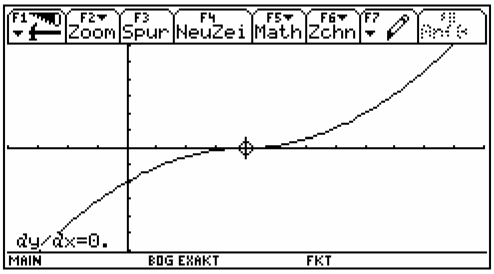
GRAPH/Math/Ableitungen/



[B 7.43]

Hinweis: Nach Eingabe der Stelle 1 erscheint dann nach ENTER-Druck unten links die numerische Ausgabe: $dy/dx = 0$.

GRAPH/Math/Ableitungen/ $dy\,/\,dx$



[B 7.44]

Interpretation: $\dfrac{dy}{dx} = 0$

(sprich: „dy nach dx gleich null").

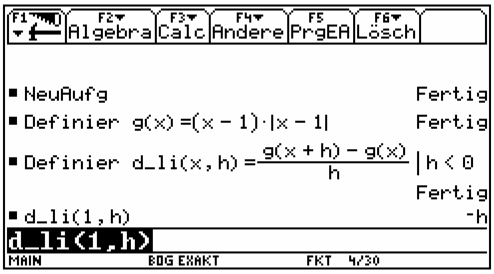
Die **numerische** Ableitung der Funktion g an der Stelle 1 beträgt 0.

Vermutung: Die Funktion g ist an der Stelle 1 differenzierbar.

Wir entwerfen mit dem Rechner auf symbolischer Ebene im Hauptbildschirm **Teile des Beweises**.

Berechnung des linksseitigen Differenzenquotienten:

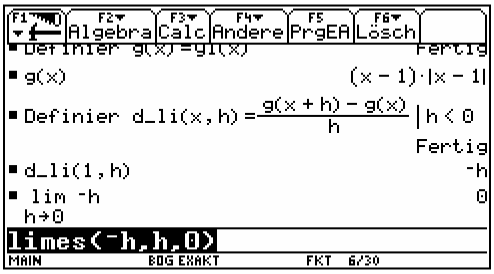
HOME/



[B 7.45]

Interpretation: An der Stelle 1 beträgt der linksseitige Differenzenquotient $d\_li:(-h)$.

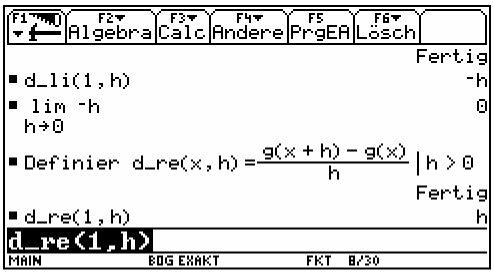
Berechnung der linksseitigen Ableitung:



[B 7.46]

Interpretation: Die Funktion g ist an der Stelle 1 linksseitig differenzierbar. Die linksseitige Ableitung beträgt 0.

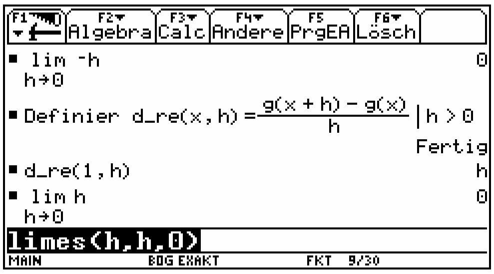
Berechnung des rechtsseitigen Differenzenquotienten:



[B 7.47]

Interpretation: An der Stelle 1 beträgt der rechtsseitige Differenzenquotient $d\_re : h$.

Berechnung der rechtsseitigen Ableitung:



[B 7.48]

Interpretation: Die Funktion g ist an der Stelle 1 rechtsseitig differenzierbar. Die rechtsseitige Ableitung beträgt ebenfalls 0.
Schlussfolgerung nach Satz S 06: Die Funktion g ist an der Stelle 1 von beiden Seiten her lokal differenzierbar. Ihre links- und rechtsseitigen Ableitungen betragen jeweils 0. Die Funktion g ist an der Stelle 1 daher lokal differenzierbar.
Vergleichen Sie mit den Lösungen 7.3 a), b) und mit der Übung 4.4.
Was stellen Sie fest?

Übung 7.9

Sind alle Bildschirminterpretationen und die zugehörigen Schlussfolgerungen nach Satz S 06 in den Lösungen zu Auftrag 7.3 zuverlässig? Erstellen Sie ohne Rechner alle notwendigen Beweise zu diesem Auftrag. Dokumentieren Sie ausführlich.
Empfehlung: Orientieren können Sie sich an den rechnergestützten Entwürfen mit den darin kommentierten Teilschritten und den angefügten Interpretationen.

Auftrag 7.4

Existiert zu der Funktion f mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle 0 eine Grenzlage der Sekantenfolge?

Lösung 7.4

Die Fragestellung:

(I) Existiert zu der Funktion f an der Stelle a eine Grenzlage der Sekantenfolge?

ist gleichwertig mit:

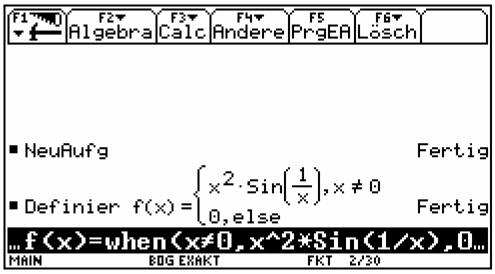
(II) Ist f in a differenzierbar?

(III) Hat f in a eine Tangente?

(IV) Gibt es in a zu f ein lineares Taylorpolynom?

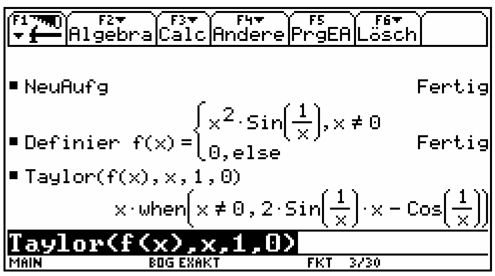
Wir befragen zur Erstellung einer Vermutung unseren Rechner und legen dazu eine CAS-Applikation an.

HOME/



[B 7.49]

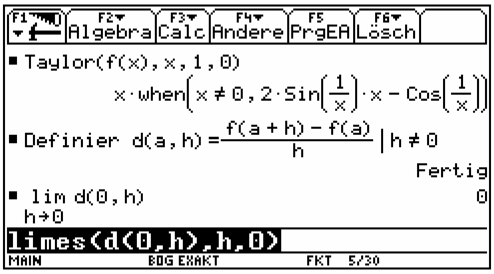
Wir setzen auf die Funktion f den Taylor-Befehl an, um die Existenz nach einem linearen Taylorpolynom in der Entwicklungsstelle 0 zu klären.



[B 7.50]

Interpretation: Die Ausgabe ist ein Produkt, bestehend aus dem Symbol x und einem „when"-Ausdruck, der unausgewertet bleibt.
Wir ändern deshalb die CAS-Applikation ab, indem wir von der Definition des Dif-

ferenzenquotienten d zur Funktion f an der Stelle a ausgehen und den zugehörigen Differen**zial**quotienten für $h \to 0$ bestimmen.



[B 7.51]

Interpretation: Die Tangente an der Stelle 0 existiert mit der x-Achse selbst.
Wir fragen uns: Steht die Interpretation im Einklang zur Mathematik?

Wir stellen folgenden Lösungsplan auf.

1. Bilden einer **Folge** von Sekanten**anstiegen** mit dem festen Punkt $P_0(a, f(a))$ und dem Schrittpunkt $P_n(a+h_n, f(a+h_n))$ mit $h_n \neq 0$. Dabei setzen wir voraus, dass (h_n) eine beliebige Nullfolge für $n \to \infty$ ist.
2. **Grenzübergang** $n \to \infty$ für die Folge von Sekantenanstiegen.

Bilden einer Folge von Sekantenanstiegen: Die Sekanten verlaufen in unserem Fall durch die Punkte $P_0(0, f(0))$ und den Schrittpunkt:

$$P_n(a+h_n, f(a+h_n))$$
$$= P_n(h_n, f(h_n))$$

mit $n \in \mathbb{N}^*$ und $a = 0$.

Folge der Sekantenanstiege:

$$\left(\frac{f(h_n)-f(0)}{h_n}\right) | h_n \neq 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^*$.

Einsetzen und umformen:

$$\left(\frac{f(h_n)-f(0)}{h_n}\right) = \left(\frac{h_n^{\,2}\cdot\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)-0}{h_n}\right)$$
$$= \left(h_n \cdot \sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right)$$

Grenzübergang $n \to \infty$ für die Folge von Sekantenanstiegen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(h_n \cdot \sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right) = ?$$

Wir leiten die Frage ab: Ist die Folge von Sekantenanstiegen

$$\left(h_n \cdot \sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right)$$

für unbeschränkt wachsende n-Werte konvergent?
Erste Überlegung: Können die Grenzwertsätze für Folgen herangezogen werden?

Antwort: Nein, denn $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right)$ existiert nicht.
Zweite Überlegung: Hat die Teilfolge

$$\left(\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right)$$

besondere Eigenschaften, die für die Konvergenz von

$$\left(h_n \cdot \sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right)$$

relevant sein könnten?
Antwort: Zum Beispiel ist die Folge

$$\left(\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right)$$

beschränkt. Eine Schranke ist zum Beispiel die Zahl 2 :

Für alle $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right| < 2$

Behauptung: $\lim_{n\to\infty}\left(h_n\cdot\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right)=0$

Beweis: Nach Aufspaltung in zwei absolute Betragsterme führen wir mithilfe der Schranke 2 eine vorsichtige Betragsabschätzung durch.

$$\begin{aligned}0 &\le \left|h_n\cdot\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right|\\ &=|h_n|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right|\\ &<|h_n|\cdot 2\end{aligned}$$

Weil (h_n) eine Nullfolge ist, gibt es bereits zu jedem $\varepsilon>0$ ein $n_0\in\mathbb{N}^*$, sodass für alle $n\ge n_0$ gilt: $|h_n|<\varepsilon$. Dann gibt es sicher auch ein $n_1\in\mathbb{N}^*$ mit $n_1>n_0$, sodass für alle $n\ge n_1$ gilt:

$$0\le\left|h_n\cdot\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right|<|h_n|\cdot 2<\varepsilon\,.$$

Wir schlussfolgern: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es eine Nummer $n_1\in\mathbb{N}^*$, sodass für alle $n\in\mathbb{N}^*$ mit $n\ge n_1$ gilt:

$$\left|h_n\cdot\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right|<\varepsilon\,.$$

Diese Aussage ist äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty}\left(h_n\cdot\sin\left(\frac{1}{h_n}\right)\right)=0\,.$$

Die Interpretation steht im Einklang zur Mathematik.

Übung 7.10

Stellen Sie die Funktion f aus Auftrag 7.4 im Fenster

$$x_{\min}=-0.0601100548\ 97$$
$$x_{\max}=+0.0592317994\ 92$$
$$y_{\min}=-0.0057670126\ 8743$$
$$y_{\max}=+0.0057670126\ 8743$$

grafisch dar.

Versuchen Sie mithilfe der Optionen
a) GRAPH/Math/Ableitungen/ dy/dx
b) GRAPH/Math/Tangente
im Punkt $P(0{,}0)$ die Tangente zu finden. Was stellen Sie fest? Welche Erkenntnis gilt in diesem Zusammenhang als gesichert?
Beachten Sie die Bemerkungen zum numerischen Ableiten aus Lösung 7.3 b).

Übung 7.11

Untersuchen Sie die Funktion f an der Stelle 2 auf Differenzierbarkeit.

$$f(x):=\begin{cases}-\frac{1}{4}x+1 & \text{für } x\le 2\\ \frac{1}{x} & \text{für } x>2\end{cases}$$

Übung 7.12

Stellen Sie im MODE-Menü den symbolischen Ausgabemodus ein. Definieren Sie im Rechner eine Funktion namens *anstieg*, mit der man zu einer gegebenen Funktion f den symbolischen Anstieg an der Stelle a bestimmen kann. Vervollständigen Sie mithilfe dieser Anstiegsfunktion die folgenden Tabellen.

a) $f(x):=x^3$

Stelle a	-6	-4	0	5
anstieg(a)				

b) $f(x):=\dfrac{1}{x-1}$

Stelle a	-0.5	-0.2	0.8	1
anstieg(a)				

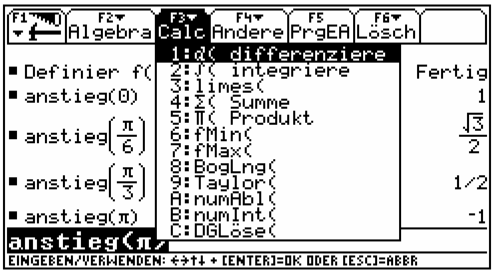
c) $f(x):=\sin(x)$

Stelle a	0	$\pi/6$	$\pi/3$	π
anstieg(a)				

INFO Lokales Ableiten einer Funktion

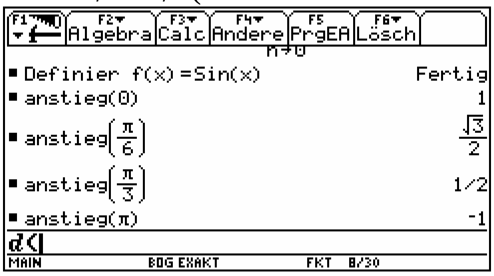
Ergänzen Sie Ihre CAS-Applikation passend zur Übung 7.12, wie folgt:

HOME/Calc/



[B 7.52]

HOME/Calc/d(differenziere

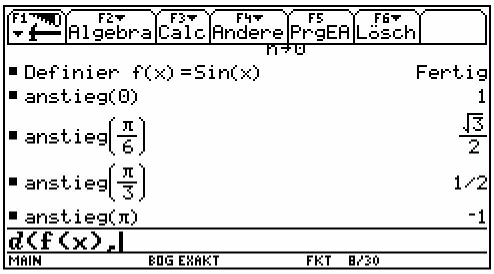


[B 7.53]

Hinweis: Dieser spezielle Funktionsname d mit öffnender Klammer kann alternativ zur beschriebenen Menüwahl auch durch die Tastenfolge [2nd] [8] editiert werden.
Die Syntax dieses Ableitungsbefehls orientiert sich im Wesentlichen an der bekannten Lehrbuchschreibweise

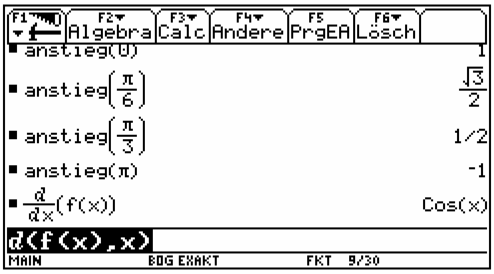
$$\frac{df}{dx},$$

die zwei Argumente aufweist. Das erste Argument ist ein variabler Term, gefolgt von einem Komma.



[B 7.54]

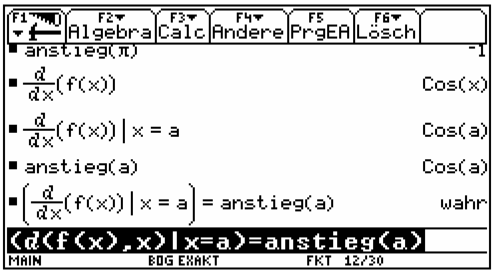
Das zweite notwendige Argument ist jene Variable nach der abgeleitet (differenziert) wird. In der Lehrbuchschreibweise steht die Ableitungsvariable stets unterhalb des Bruchstrichs und folgt dem speziellen d-Zeichen. Die Belegung des Ableitungsbefehls wird mit einer runden Klammer geschlossen.



[B 7.55]

Interpretation: Der Ableitungsbefehl liefert zum Term $f(x) := \sin(x)$ und der Ableitungsvariable x den Ableitungsterm $\cos(x)$.

Frage: Welche Bedeutung hat der Ableitungsterm $\cos(x)$ an der Stelle a?



[B 7.56]

Interpretation der dritten Ausgabe von unten: Der Ableitungsterm $\cos(x)$ liefert an der Stelle a die Zahl $\cos(a)$.

Interpretation der vorletzten und letzten Ausgabe: Die gleiche Zahl $\cos(a)$ wird auch von der Funktion, namens *anstieg*, ausgegeben, wenn man als Argument die Stelle a wählt.

Im Allgemeinen gilt:

Die Ableitungsfunktion f' ordnet jedem Argument a aus dem Inneren des Definitionsbereiches der Funktion f im Falle der lokalen Differenzierbarkeit an gleicher Stelle den lokalen Anstieg der Funktion f zu.

Frage: Welche operativen Handlungen verbindet man mit der Ausdrucksweise: „Eine Funktion wird an einer Stelle lokal abgeleitet (differenziert).“?
Zunächst betrachten wir die gängigen Notationen an einem Beispiel.

Funktion f mit $f(x) := \sin(x)$		
Lehrbuch:	**Rechner:**	**Lehrbuch:**
$\left.\frac{df}{dx}\right\|_{x=a}$	$d(f(x),x) \| x=a$ $\frac{d}{dx}(f(x)) \| x=a$	$f'(a)$

Ableiten

Spezielle Funktionswertberechnung an der Stelle a:

$$\left(f'(x)\big|_{x=a}\right) = f'(a)$$
$$= (\sin(a))' = \cos(a)$$

Unter dem lokalen Ableiten (lokales Differenzieren) einer an der Stelle a lokal differenzierbaren Funktion f versteht man die Funktionswertberechnung von $f'(a)$. Die Funktion f' mit

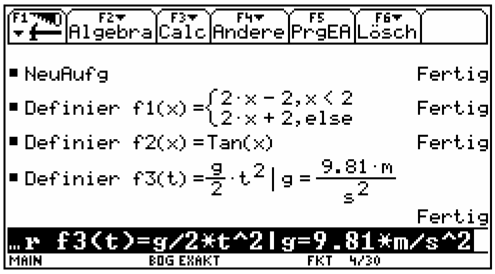
$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

heißt Ableitungsfunktion zur Funktion f.

Übung 7.13

Gegeben ist eine CAS-Applikation mit drei symbolisch definierten Funktionen f_1, f_2 und f_3, deren Funktionsterme symbolisch im Rechner definiert sind.

HOME/



[B 7.57]

a) Beschreiben (grafisch, tabellarisch, verbal) und interpretieren Sie die Ableitungsfunktionen der drei reellen Funktionen f_1, f_2 und f_3.

b) An welchen Stellen sind die reellen Funktionen f_1, f_2 und f_3 nicht lokal linearisierbar bzw. nicht linear approximierbar? Begründen Sie.

Übung 7.14

Gegeben ist der Funktionsterm:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ m \cdot x + c & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

a) Für welche reellen Zahlen c und m ist die Funktion f an der Stelle 1 differenzierbar?

b) Stellen Sie die Funktion f mit den entsprechenden Belegungen für c und m in einem rechtwinkligen Koordinatensystem grafisch dar. Zeichnen Sie in das gleiche Fenster die zugehörige Ableitungsfunktion f' und interpretieren Sie in einer Umgebung der Zahl 1 beide Grafen an jeweils gleicher Stelle.

c) Ist die Ableitungsfunktion f' an der Stelle 1 stetig (differenzierbar)? Begründen Sie.

d) Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Ersatzterms an der Stelle 1 einen Näherungswert für 0.9.

Übung 7.15

An welcher Stelle hat die Funktion f mit

$$f(x) := \frac{x+1}{x-2}$$

den Anstieg (-1)?
Antworten: $2-\sqrt{3}$ und $2+\sqrt{3}$.

Übung 7.16

Welche Anstiege hat die Funktion f mit $f(x) := |x-10|$ an den Stellen 0, 10 und 20? Testen Sie zu Beginn mit Ihrem Rechner die Funktion *anstieg* an den drei genannten Stellen aus. Begründen Sie anschließend Ihre Rechnerergebnisse ausführlich.
Antworten: -1, nicht definiert, 1.

Übung 7.17

Haben zwei in a differenzierbare Funktionen eine **gemeinsame** Tangente, so sagt man, dass sich die beiden Funktionen an dieser Stelle a **berühren**. In der mathematischen Fachsprache bedeutet das, es gibt für beide Funktionen in einer Umgebung von a **genau** einen gemeinsamen Punkt. Man sagt auch die Grafen beider Funktionen **schneiden** sich in genau einem Punkt.

a) Zeigen Sie, dass sich die Funktionen f, g und h mit $f(x) := x^5$, $g(x) := x^6$ und $h(x) := -x^7$ in einem Punkt berühren.

b) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) := \frac{1}{x} \mid x > 0$ und $g(x) := \frac{1}{x} \mid x < 0$.
Verschieben Sie den Grafen von g parallel zu den beiden Koordinatenachsen um zwei Einheiten nach rechts und um zwei Einheiten nach oben. Zeigen Sie, dass der Graf der auf diese Weise neu konstruierten Funktion (dann allerdings für $x < 2$) den Grafen von f berührt. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes an.

c) Bestimmen Sie drei quadratische Funktionen, die sich im Punkt $P(1,1)$ berühren.

Übung 7.18

Bestimmen Sie mithilfe der Definitionen des Differen**zen**quotienten und des Differen**zial**quotienten im symbolischen Ausgabemodus die 1. Ableitungen der Funktionen f und g mit $f(x) := e^x$ und $g(x) := \ln(x)$ jeweils an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
Antworten: $f'(x_0) = e^{x_0}$, $g'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

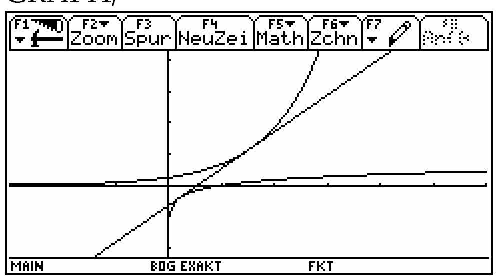
Auftrag 7.5

Gesucht wird eine Tangente, die sowohl die Funktion f mit $f(x) := e^x$ als auch die Funktion g mit $g(x) := \ln(x)$ in jeweils einer Berührstelle approximiert.

Lösung 7.5

Vorüberlegung: Wir zeigen hier vorerst nur das Grafikfenster, indem die beiden Funktionsgrafen von f und g als auch eine Gerade ausschnittsweise zu sehen sind.

GRAPH/



[B 7.58]

Hieraus erkennt man im Sinne einer Vermutung, dass die Gerade die beiden Funktionen f und g im ersten Quadranten augenscheinlich berührt und damit gemeinsame Tangente ist. Weiter ist aus dem Bild zu erkennen: $x_1 \in D(g)$, $x_2 \in D(f)$ und $x_1 < x_2$.

Angenommen es gibt eine solche Tangente τ, dann existieren zwei Berührstellen $x_1 \in D(g)$, $x_2 \in D(f)$ und genau eine Steigung $m \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$H(x_1, x_2):\ m \cdot (x_2 - x_1) + g(x_1) = f(x_2) \qquad (1)$$

mit $m := g'(x_1) = f'(x_2)$

Übung 7.19

Begründen Sie den Ansatz (1).

Wir ermitteln nun derartige Zahlen x_1, x_2 und m. Aus dem Ansatz

$$g'(x_1) = f'(x_2) \qquad (2)$$

folgt schließlich für $x_1 \neq 0$:

$$\left(e^{x_2} = \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow x_1 = e^{(-x_2)} \right) \qquad (3)$$

Vergleichen Sie auch mit der Übung 7.18.
Wegen (2) und (3) definieren wir:

$$m := e^{x_2} \qquad (4)$$

$$x_1 := e^{(-x_2)} \qquad (5)$$

Dann ergibt sich mit m und x_1 aus (1) zunächst

$$e^{x_2} \cdot (x_2 - x_1) + \ln(x_1) = e^{x_2}$$

$$e^{x_2} \cdot (x_2 - e^{(-x_2)}) + \ln(e^{(-x_2)}) = e^{x_2} \qquad (6)$$

$$e^{x_2} \cdot x_2 - 1 - x_2 = e^{x_2}$$

$$e^{x_2} \cdot x_2 - e^{x_2} - 1 - x_2 = 0$$

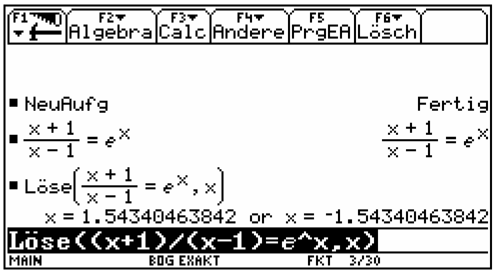
$$e^{x_2}(x_2 - 1) = 1 + x_2$$

und schließlich folgt die Gleichung

$$e^{x_2} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Bigg| x_2 \neq 1. \qquad (7)$$

Eine geschlossene analytische Lösung für Gleichung (7) in $x_2 \in \mathbb{R}$ gibt es nicht. Wir versuchen deshalb, eine approximative Lösung zu finden.

HOME/



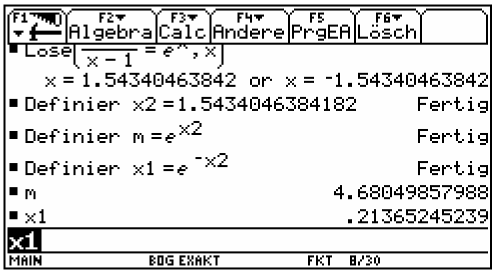
[B 7.59]

Interpretation: Formale numerische Lösungen sind:

$$x_{2,1} := -1.54340463842 \text{ und}$$

$$x_{2,2} := +1.54340463842 \ .$$

Für uns reicht nach der Vorüberlegung die positive approximative Lösung $x_{2,2}$ völlig aus. Aus (4) und (5) ergeben sich dann zwangsläufig:



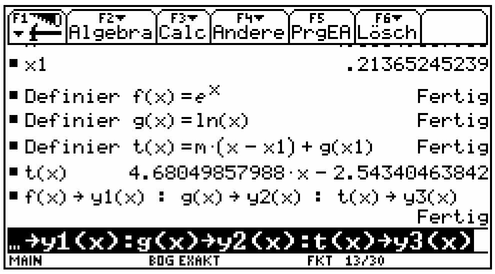
[B 7.60]

Interpretation:

$$m := e^{x_2} \quad = 4.68049857988 \qquad (4')$$

$$x_1 := e^{(-x_2)} = 0.21365245239 \qquad (5')$$

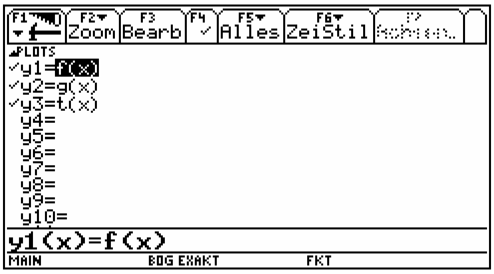
Um den **numerischen** Tangententerm schließlich berechnen und grafisch veranschaulichen zu können, legen wir zunächst eine CAS-Applikation an.



[B 7.61]

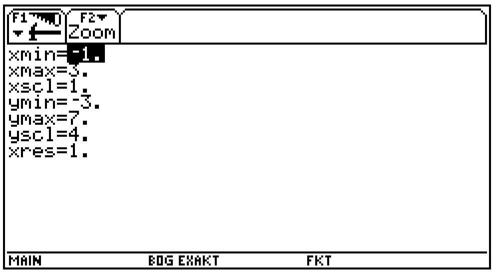
Interpretation: Die Tangente τ hat den approximierten Term: $4.6805 \cdot x - 2.5434$.

Y=Editor/



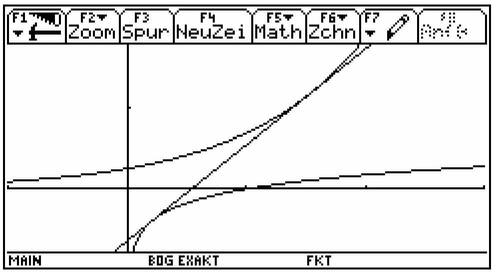
[B 7.62]

WINDOW/



[B 7.63]

GRAPH/



[B 7.64]

Zum Abschluss unserer Abhandlung wollen wir uns mit einer weit verbreiteten Vorstellung über Tangenten kritisch auseinander setzen.

Übung 7.20

Diskutieren Sie kritisch die Ansicht, dass eine Tangente nach Definition D 08 im Falle der lokalen Differenzierbarkeit an der Stelle a in einer Umgebung von a genau einen gemeinsamen Punkt mit dem jeweiligen Funktionsgrafen hat. Betrachten Sie dabei die Ergebnisse der Aufträge 7.4 und 7.5, sowie die Ergebnisse aus Übung 7.10.

Anhang

Definitionen und Sätze auf einen Blick

Definition D 01

$f(x)$ sei der Term der Ausgangsfunktion f, $t(x)$ ein Ersatzterm und s sei eine nicht negative reelle Zahl. Ein Ersatzterm $t(x)$ liefert an der Stelle a für die approximative Berechnung des Funktionswertes $f(a)$ einen guten Näherungswert per Definition genau dann, wenn $|f(a)-t(a)| \leq s$. Ansonsten einen schlechten Näherungswert.

Definition D 02

Unter dem Anstiegswinkel α einer Geraden g im kartesischen x-y-Koordinatensystem versteht man jenen Winkel, den die Gerade g mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

Definition D 03

h sei eine von Null verschiedene reelle Zahl. f sei eine Funktion und mindestens im Intervall $I := [x_0,\ x_0+h]$ definiert. Die Punkte P_0 und P_h mit $P_0(x_0, f(x_0))$ und $P_h(x_0+h, f(x_0+h))$ liegen auf dem Grafen von f. Die Gerade $s(P_0,\ P_h)$ bezeichnen wir dann als Sekante von f im Intervall I.

Definition D 04

f sei eine Funktion. Die Punkte P_0, P_h liegen auf dem Grafen der Funktion f. Die Funktion f sei mindestens im Intervall $I := [x_0, x_0+h]$ definiert. Die Funktion d heißt Differenzenquotient per Definition genau dann, wenn:

$$d(x_0,h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ mit } h \neq 0.$$

Definition D 05

f sei eine Funktion und h eine reelle Zahl mit $h \neq 0$. Es gelte weiterhin: $a \in D(f)$ und $a+h \in D(f)$. Die Funktion f ist an der Stelle a lokal differenzierbar per Definition genau dann, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert.

Definition D 06

f sei eine Funktion und in einer Umgebung von a definiert. Die Funktion f ist an der Stelle a linksseitig bzw. rechtsseitig differenzierbar per Definition genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{bzw.}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{existiert.}$$

Definition D 07

f sei eine Funktion und an der Stelle a differenzierbar. Die Funktion f hat an der Stelle a den Anstieg $m(a)$ mit

$$m(a) := \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Definition D 08

f sei eine Funktion und an der Stelle a differenzierbar. Eine Gerade heißt Tangente der Funktion f an der Stelle a per Definition genau dann, wenn die Gerade durch den Punkt $P(a, f(a))$ verläuft und den Anstieg

$$m(a) := \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ hat.}$$

Satz S 01

Wenn $t(x)$ mit a als Entwicklungsstelle ein Taylorpolynom des Ausgangsterms $f(x)$ ist, dann gilt in einer Umgebung von a: $f(a)=t(a)$ und $\lim_{x\to a}|f(x)-t(x)|=0$.

Satz S 02

f sei eine Funktion in x und a sei eine Stelle aus dem Inneren des Definitionsbereiches von f.

$l(x,m,a):=m\cdot(x-a)+f(a)$ sei ein linearer Term in x mit Anstieg m und es gelte: $l(x,m,a)\in L_a$. In der Menge L_a ist ein lineares Taylorpolynom zur Funktion f in der Entwicklungsstelle a als Element genau dann enthalten, wenn es eine reelle Zahl c derart gibt, sodass gilt: $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-l(x,c,a)}{x-a}\right)=0$.

(Minimalitätseigenschaft)

Satz S 03

Die Funktion f sei mit $f(x,m,n):=m\cdot x+n$ eine lineare Funktion in x. Dabei sind die Werte m und n bekannt. Der Graf von f sei die Gerade g im kartesischen x-y-Koordinatensystem. Für den Anstiegswinkel α der Geraden g gilt dann: $\tan(\alpha)=m$.

Satz S 04

Wenn eine Funktion f an der Stelle a differenzierbar ist, dann ist die Funktion f an der Stelle a sowohl links- als auch rechtsseitig differenzierbar.

Satz S 05

Jede in a differenzierbare Funktion f ist an gleicher Stelle auch stetig.

Satz S 06

Eine Funktion f ist an der Stelle a genau dann differenzierbar, wenn sie in a sowohl links- als auch rechtsseitig differenzierbar ist und die links- und rechtsseitigen Ableitungen von f in a übereinstimmen.