

Die beste aller Geraden

**Eine Einführung in das Tangentenproblem
mit dem Voyage™ 200**

(auch für TI-92 Plus und TI-89-Serie geeignet)

Die beste aller Geraden

von

Frank Schumann

KOPIERVERBOT

**Der Inhalt dieses Buches darf weder digitalisiert, noch in Teilen oder im
Ganzen vervielfältigt werden.
Bei Zuwiderhandlungen behält sich der Verlag alle juristischen Mittel vor.**

Schumann`s Verlagshaus

Frank Schumann

Eine Einführung in das Tangentenproblem mit dem Voyage™ 200

Die beste aller Geraden

© 2004 Schumann`s Verlagshaus

2. berichtigte Auflage

Satz: Frank Schumann, Sangerhausen, Germany

Lektorat: Hendrik Thiele, Sangerhausen, Germany

Layout: Math-College® - Privates Institut für Schulmathematik, Sangerhausen,
Germany

Umschlag: Laszlo, Hamburg, Germany

Text, Abbildungen und Programme wurden mit größter Sorgfalt erarbeitet. Der Verlag und der Autor können jedoch für eventuell verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Schumann`s Verlagshauses in irgendeiner Form durch Fotokopie, Mikrofilm oder andere Verfahren reproduziert oder in eine für Maschinen, insbesondere Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache übertragen werden. Auch die Rechte der Wiedergabe durch Vortrag, Funk und Fernsehen, sowie anderen Medien sind vorbehalten.

Math-College® und Voyage™ 200 sind eingetragene Markenzeichen.

Einleitung

Der klassische Einstieg in die Differenzialrechnung in Klasse 11 erfolgt meistens über das Tangentenproblem oder die Grenzwertbetrachtungen für Änderungsraten. Dieses Buch widmet sich ausschließlich und ausführlich dem Tangentenproblem in einer rechnerorientierten Darstellungsweise.

Im Unterschied zu den meisten Abhandlungen in Schullehrbüchern wird das Tangentenproblem in diesem Lese- und Arbeitsbuch mit Fragen zur lokalen Approximation von Funktionen auf anschauliche Art und Weise eingeleitet. Dabei wird am Beispiel des Begriffes Tangente deutlich, welchen starken Einfluss Rechenhilfsmittel und ihre immanenten Methoden, wie zum Beispiel der Grafikrechner mit seiner grafisch-numerischen- wie auch CAS-Komponente auf die Begriffsbildung haben können. So wird für den Begriff Tangente eine Art methodischer Dualismus aufgebaut, der sowohl die approximative als auch die analytische Seite dieser besonderen Gerade wechselseitig dominant prägt.

Im Anschluss daran werden die Themen der Sekantenanstiege und der Grenzwertgeraden unabhängig vom Approximationsproblem behandelt. Der Zusammenhang zwischen beiden Hauptthemen wird mit den Betrachtungen zur lokalen Differenzierbarkeit eingeleitet und insbesondere mit dem Thema der Weierstraß'schen Zerlegungsformel näher untersucht. Mit der Problematik Anstieg einer Kurve in einem Punkt wird aus zwei intuitiven Vorstellungen zur lokalen Anstiegsdefinition der Hauptgedanke zur Bildung einer Grenzgeraden ausführlich erörtert, um so auch die Notwendigkeit einer entsprechenden Grenzwertbetrachtung für Anstiegsfolgen von Sekanten zu begründen.

Die einzelnen Themen aus diesem Buch integrieren den grafikfähigen Taschenrechner mit Computeralgebrasystem, Voyage™ 200, von Texas Instruments. Anwender des TI-92 Plus oder der TI-89-Reihe können ebenso von diesem Buch profitieren.

Für eine verständliche Dokumentationsführung am Rechner führen wir die Begriffe **CAS-Applikation** und **grafisch-numerische Applikation** ein. Diese beiden Arten von Applikationen können und sollen vom Benutzer selbst am Taschenrechner hergestellt werden und verlangen keine weitere Installation von so genannten Softwareapplikationen. Die vorgestellten Applikationen können natürlich jederzeit vom Benutzer nach Belieben abgeändert werden und sollen zu einem weiterführenden Experimentieren mit Zahlen und Symbolen förmlich einladen.

Definition: Beim rechnergestützten Lösen einer Aufgabe bilden alle aufgabenrelevanten Eingabedaten, einschließlich aller auszuwählenden Optionen, genau dann eine **CAS-Applikation** für den Voyage™ 200, wenn:

1. Vor der ersten aufgabenrelevanten Eingabe eine HOME-Bereinigung vorgenommen wurde.
2. Im MODE-Menü der symbolische Ausgabemodus EXAKT gewählt wurde.
3. Die finalen Ausgaben prinzipiell symbolisch als auch approximativ sein können.

Definition: Beim rechnergestützten Lösen einer Aufgabe bilden alle aufgabenrelevanten Eingabedaten, einschließlich aller auszuwählenden Optionen, genau dann eine **grafisch-numerische Applikation** für den Voyage™ 200, wenn:

1. Vor der ersten aufgabenrelevanten Eingabe eine HOME-Bereinigung vorgenommen wurde.
2. Die finalen Ausgaben approximativ sind und nicht in entsprechende wertfreie Symbole rechnergestützt umgewandelt werden können.

Das Buch beginnt mit einem Lehrer-Schülerdialog zu einer rechnerbezogenen praktischen Aufgabe aus dem Unterricht, die in den weiteren sieben Lerneinheiten zum Tangentenproblem führen wird.

Die Verwendung der Taylorpolynome setzt **keine** Kenntnisse zur Taylorreihenentwicklung voraus. Sie werden auch **nicht** zum Lernziel erklärt. Es wird vielmehr der grafisch-numerische Anwendungsaspekt zur lokalen Linearisierung und der einhergehenden linearen Approximation differenzierbarer Funktionen thematisiert.

Fast alle Abschnitte sollten von den Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeitet werden können. Viele Übungen dienen der Festigung des mathematischen Könnens, der Vertiefung von Wissen und tragen so zu mehr Anwendungsbereitschaft bei. Die Übungen sind meist in die Phasen des neu zu erarbeitenden Wissens integriert.

Im Umgang mit dem Voyage™ 200 werden bei Schülerinnen und Schülern grundlegende Werkzeugkompetenzen vorausgesetzt. Mehr Informationen dazu finden Sie in den Büchern „Das Einmaleins des Voyage™ 200“ oder „Das Einmaleins des TI-89 und des TI-89 Titanium“ (eine grundlegende Einführung in das Arbeiten mit TI-CAS-Rechnern). Ebenfalls erschienen im Schumann`s Verlagshaus.

Für Kritik und Anregungen bin ich meinen Lesern sehr dankbar.

Sangerhausen im September 2004
Frank Schumann

Kontaktadresse:

Math-College®
Privates Institut für Schulmathematik
c/o Frank Schumann
Georgenpromenade 38
D-06526 Sangerhausen
Frank.Schumann@math-college.de
www.math-college.org

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| Der einfache Taschenrechner | 1 |
| 1 Ersatzterme für $\sin(\alpha)$ | 2 |
| 2 Der Taylorbefehl | 5 |
| 3 Approximation | 13 |
| 4 Lineare Approximation und lokale Linearisierung an der Stelle a | 16 |
| 5 Die Menge L_a und die Minimalitätseigenschaft | 19 |
| 6 Der Anstieg einer Sekante | 32 |
| 7 Der Anstieg eines Grafen an der Stelle a | 38 |
| Anhang: Definitionen und Sätze auf einen Blick | 64 |

Hier ist Platz für Ihre Notizen: