Name des KB:
X X X

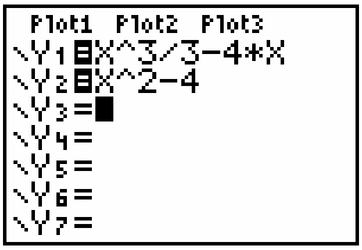
GRAFISCH ABLEITUNGSWERTE...

Überprüfen Sie an drei Stellen grafisch, ob x^2-4 der Steigungsterm zu $x^3/3-4x$ ist.

Term speichern

[2nd] [+] [7] [1] [2] [ENTER] [CLEAR]
[Y=] $x^3/3-4x$ [ENTER]
x^2-4 [ENTER]

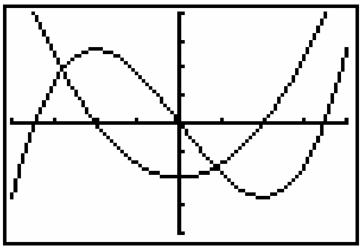
Nach umfangreichen Rechnungen oder Zeichnungen ist es sinnvoll, mal wieder den Grafik-Startzustand herzustellen. Dann werden die Terme gespeichert.



Term zeichnen

[WINDOW] Parameter:
Xmin = -4; Xmax = 4; Xscl = 1
Ymin = -8; Ymax = 8; Yscl = 2; Xres = 1. [GRAPH]

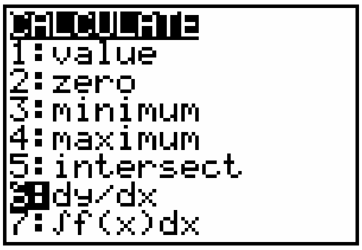
Die Grafikfensterparameter passt man für eine übersichtliche Darstellung an.



Ableitung markieren

[2nd] [TRACE]
▼ **(5 mal)**

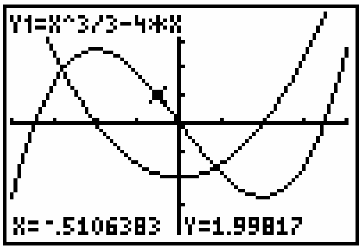
Der Befehl, numerisch Ableitungswerte zu ermitteln, befindet sich im **CALC**-Menü an der sechsten Stelle. Er kann erst markiert werden...



Stelle markieren

[ENTER] **oder** [6]
◀ **(6 mal)**

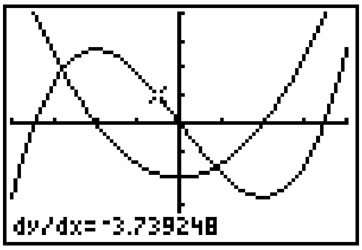
...und mit [ENTER] ausgeführt oder direkt mit der Schnelleingabe aufgerufen werden. Es erscheint ein Cursor auf dem ersten Grafen, dessen Position mit den Cursor-Tasten eingestellt werden kann.



Ableitung ausführen

[ENTER]

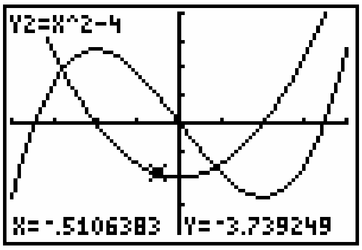
Ist die gesuchte Stelle markiert, so wird nach Betätigen der [ENTER]-Taste der numerisch ermittelte Wert der Ableitung an dieser Stelle in der untersten Zeile angezeigt.



Term wechseln

[TRACE] ▼

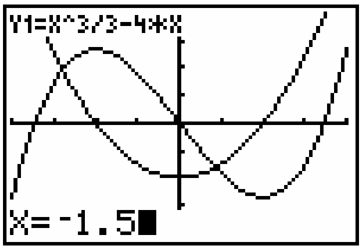
Schaltet man in den **TRACE**-Modus um, so kann man mit der ▼-Taste zum zweiten Grafen wechseln. Der **y**-Wert zeigt gute Übereinstimmung.



...ANZEIGEN

Überprüfen Sie an drei Stellen grafisch, ob $x^2 - 4$ der Steigungsterm zu $x^3/3 - 4x$ ist.

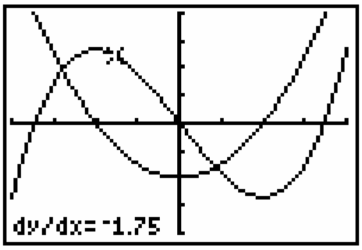
Stelle eingeben



[2nd] [TRACE] [6] [(-)] [1] [.] [5]

Natürlich kann auch bei der Ermittlung von Ableitungswerten die Stelle direkt per Tastatur eingegeben werden...

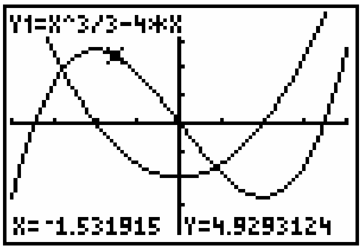
Ableitung ausführen



[ENTER]

...und nach einer Bestätigung des Wertes wird die Ableitung an dieser Stelle angezeigt. Jedoch...

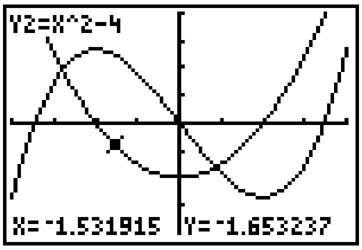
TRACE auswählen



[TRACE]

...sieht man bereits direkt nach Betätigen der [TRACE]-Taste, das der **x**-Wert der Position des Cursors nicht mehr genau mit dem über die Tastatur eingegebenen Wert übereinstimmt...

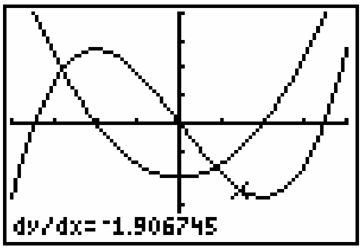
Term wechseln



▼

...und somit der Wechsel zum Ableitungsterm auch nicht den korrekten **y**-Wert wiedergeben kann.

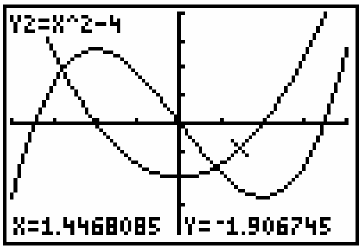
Stelle markieren



[2nd] [TRACE] [6]
[2nd] **▶ (7 mal)**
[ENTER]

Auch um Stellen für Ableitungen zu markieren, kann man mittels der [2nd]-Taste die Bewegungssprünge des Cursors vergrößern.

Term wechseln



▲

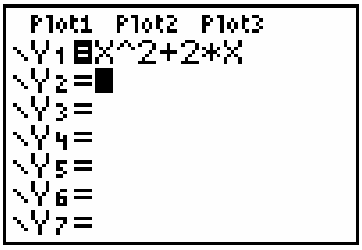
Es muss nicht unbedingt der **TRACE**-Modus eingeschaltet sein, um zum zweiten Grafen zu wechseln, es reicht auch einfach die ▲-Taste.

EINE ABLEITUNGSFUNKTION...

Stellen Sie grafisch die Funktion *f* mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 + 2x$ gemeinsam mit ihrer Ableitungsfunktion dar.

Term speichern

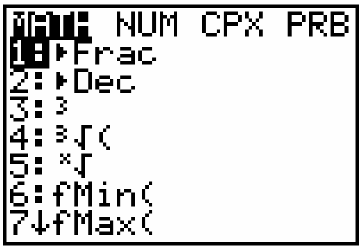
2nd + 7 1 2 ENTER CLEAR
Y= $x^2 + 2x$ ENTER



Zur Vorbereitung auf eine umfangreiche Aufgabe wird der Grafik-Startzustand hergestellt, bevor der neue Term gespeichert wird.

MATH öffnen

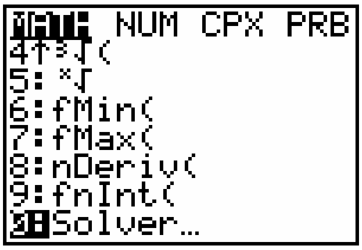
MATH



Über die Sondertaste MATH gelangt man in ein Menü, in dem Operationen für Funktionsterme aufgelistet sind. Der Pfeil vor dem Eintrag **7** zeigt, dass es noch mehr Befehle in der Liste gibt.

Menü scrollen

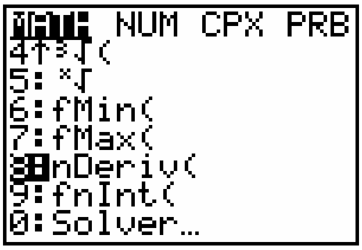
▲



Natürlich könnte man mit der ▲-Taste die einzelnen Menüpunkte abfahren, schneller geht es aber einmal mit der ▲-Taste. Hierdurch gelangt man direkt an das Ende der Liste.

nDeriv markieren

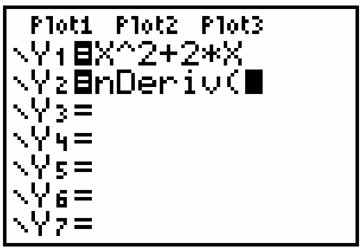
▲ ▲



Wir brauchen die numerische Ableitung, die an Position Nummer **8** im **MATH**-Menü aufgeführt ist. Zunächst wird der Befehl markiert...

nDeriv auswählen

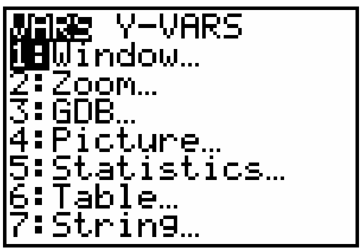
ENTER **oder** 8



...und dann per ENTER-Taste in den **Y=** Editor übernommen, und zwar an die letzte Position des Cursors dort. Nun brauchen wir den Termnamen **Y1** in der Liste der Argumente.

VARS öffnen

VARS

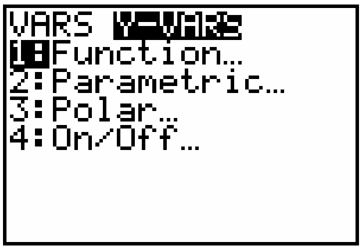


Dazu öffnen wir erst einmal das Menü der Namen für Systemvariablen...

...GRAFISCH DARSTELLEN

Stellen Sie grafisch die Funktion *f* mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 + 2x$ gemeinsam mit ihrer Ableitungsfunktion dar.

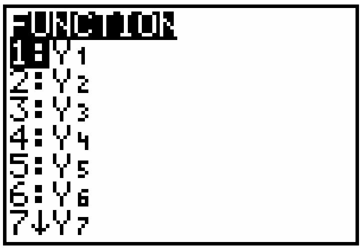
Y-VARS öffnen



▶

...in dem es ein weiteres Untermenü namens **Y-VARS** gibt, dessen Inhalt nach der Markierung mit der ▶-Taste auf dem Bildschirm sichtbar wird. Auch hier gibt es noch einmal Untermenüs, wie die Punkte anzeigen...

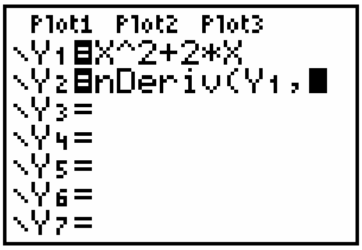
Function öffnen



[ENTER] **oder** [1]

...von denen wir **Function** auswählen, denn hier ist die Liste der Systemnamen von Grafikvariablen. Per Schnelleingabe kann man ebenfalls auswählen, dann muss man lediglich die entsprechende Ziffern-Taste [1] drücken.

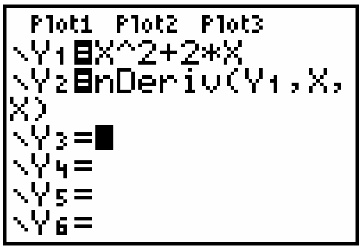
Y1 auswählen



[ENTER] **oder** [1]
[,]

Da der gesuchte Name schon markiert ist, reicht einmal [ENTER], um **Y1** an die erste Stelle der Argumentliste zu setzen. Da noch weitere Argumente folgen, wird auch noch ein Komma eingegeben, denn es muss noch...

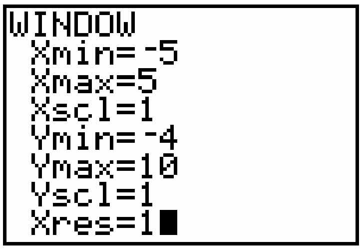
Term speichern



x [,] *x* [)]
[ENTER]

...die Variable kommen, nach der abzuleiten ist. Der letzte Eintrag gibt die Stelle an, an der die Ableitung zu bilden ist. Trägt man hier **x** ein, so durchläuft dieses alle Werte der **x**-Achseneinstellung und man erhält die Ableitungsfunktion.

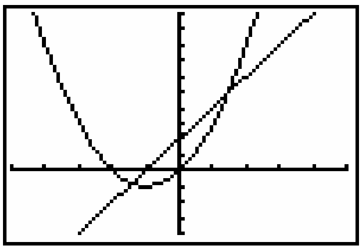
Grafikfenster einstellen



[WINDOW] Parameter:
Xmin = -5; Xmax = 5; Xscl = 1
Ymin = -4; Ymax = 10; Yscl = 1; Xres = 1.

Jetzt muss nur noch das Grafikfenster entsprechend angepasst werden...

Graf zeichnen



[GRAPH]

...und schon erhält man eine Darstellung der zu untersuchenden Funktion samt ihrer 1. Ableitung.

TANGENTENGLEICHUNG GRAFISCH

Ermitteln Sie für die Funktion *f* mit dem Funktionsterm $f(x) = x^3/3 - 4x$ an der Stelle $x = -1{,}0$ die Gleichung der Tangenten. Überprüfen Sie den Steigungswert im Grafikfenster.

Term zeichnen

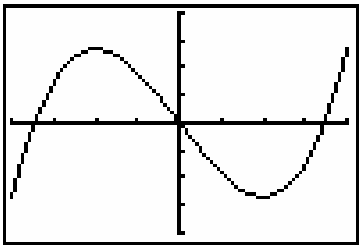
[2nd] [+] [7] [1] [2] [ENTER] [CLEAR]

[Y=] $x^3/3 - 4x$ [ENTER]

[WINDOW] Parameter:

Xmin = -4; Xmax = 4; Xscl = 1

Ymin = -8; Ymax = 8; Yscl = 2; Xres = 1. [GRAPH]

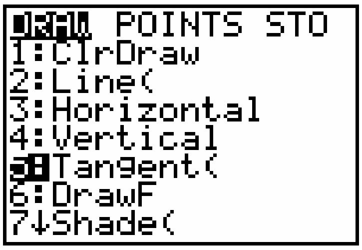


Tangent(markieren

[2nd] [PRGM]

▼ (4 mal)

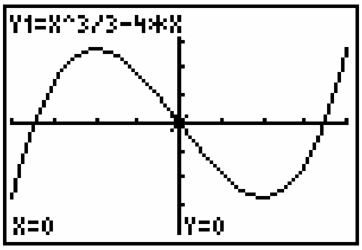
Im **DRAW**-Menü, das als Zweitbelegung der [PRGM]-Taste realisiert ist, existiert als fünfter Eintrag der Befehl **Tangent**, der zunächst wieder markiert wird...



Tangent auswählen

[ENTER] **oder** [5]

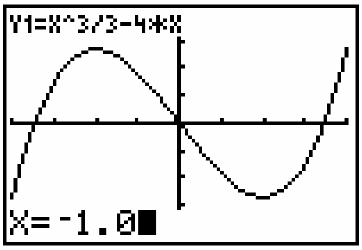
...und danach ausgewählt wird. Es erscheint der Funktionsterm und ein Cursor in der Mitte des Bildschirms mit den dazu gehörenden Koordinaten. Entweder wird also der Cursor an die entsprechende Stelle bewegt...



Stelle eingeben

[(-)] [1] [.] [0]

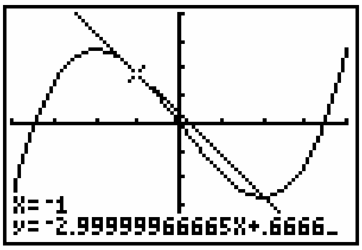
...was allerdings oft aufgrund der darstellbaren **x**-Werte zu einem ungenauen Wert führen kann. Oder der gesuchte **x**-Wert wird wieder direkt über die Tastatur eingegeben, wie es hier getan wurde.



Tangent ausführen

[ENTER]

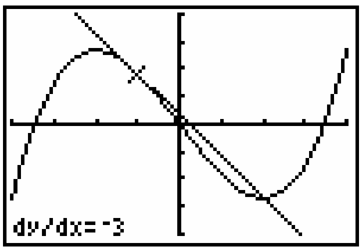
Es wird nun die Tangente gezeichnet, der Cursor springt auf den vorgegebenen Punkt, dessen **x**-Koordinate in der vorletzten Zeile angezeigt wird. Die unterste Zeile gibt die Gleichung der gezeichneten Tangenten wieder.



Ableitung ausführen

[2nd] [TRACE] [6] [(-)] [1] [.] [0] [ENTER]

Wie die Überprüfung mit der Berechnung des Ableitungswertes zeigt, sind alle numerisch ermittelten Ergebnisse mit wenig Skepsis zu betrachten!

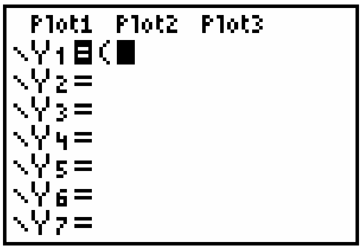


SIMULATION EINER...

> Simulieren Sie die grafische Darstellung der auf dem Intervall $[-2,\, 2]$ definierten Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 + 1$ und den Achsenbegrenzungen $x_{\min} = -3$ sowie $x_{\max} = 3$.

Klammer öffnen

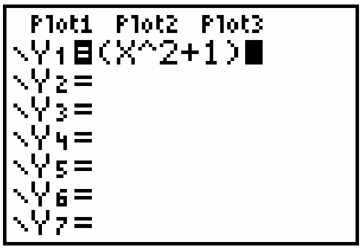
[2nd] [+] [7] [1] [2] [ENTER] [CLEAR]
[Y=] [(]



Für einen gemeinsamen Ausgangszustand löschen wir den **RAM**-Speicher. Dann wird der **Y=** Editor geöffnet und eine öffnende Klammer eingegeben.

Term eingeben

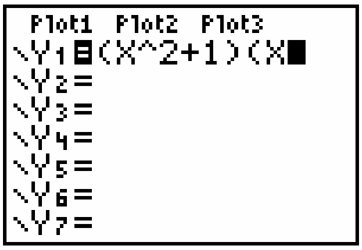
$x^2 + 1$ [)]



Erst dann folgt der Term und danach wieder eine schließende Klammer. Nur auf den in Klammern gesetzten Term bezieht sich der im folgenden einzugebende Ausdruck, der das Intervall begrenzt.

Variable eingeben

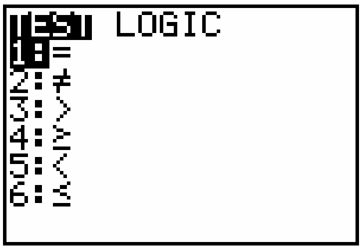
[(] x



Nun muss gekennzeichnet werden, für welche Variable die Beschränkung des Intervalls vorgegeben ist. Dazu öffnen wir direkt nach dem geklammerten Term wieder eine Klammer und tippen **x** ein.

TEST öffnen

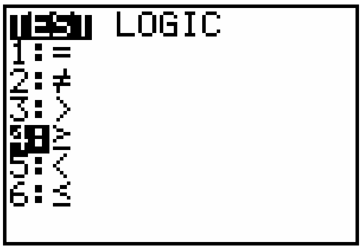
[2nd] [MATH]



Als Zweitbelegung über der [MATH]-Taste befindet sich das **TEST**-Menü, in dem sämtliche aussagenlogische Vergleichsoperatoren aufgelistet sind.

Relation markieren

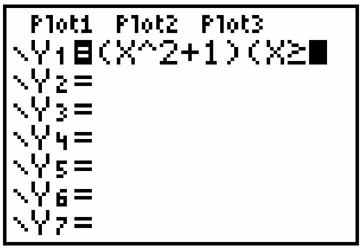
▼ (3 mal)



Als vierten Eintrag finden wir das Größer- oder Gleich-Zeichen. Es wird zunächst mit dem Cursor markiert...

Relation auswählen

[ENTER] **oder** [4]



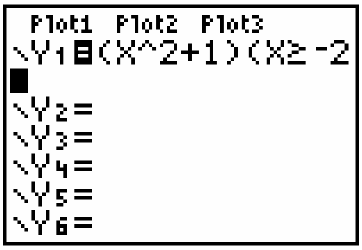
...und dann mit der [ENTER]-Taste ausgewählt. Im **Y=** Editor erscheint es nun direkt hinter der Variablen...

...AUF EINEM INTERVALL...

Simulieren Sie die grafische Darstellung der auf dem Intervall $[-2, 2]$ definierten Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 + 1$ und den Achsenbegrenzungen $x_{min} = -3$ sowie $x_{max} = 3$.

Intervallgrenze eingeben

[(-)] [2]



...sodass wir sofort die linke Intervallgrenze dahinter schreiben können.

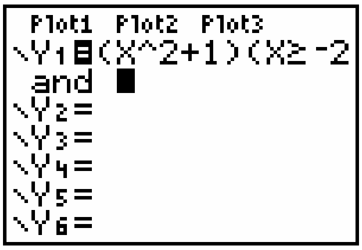
LOGIC öffnen

[2nd] [MATH] ▶

Allerdings haben wir ja auch noch eine obere Grenze festzulegen. Daher öffnen wir zunächst das **TEST/LOGIC**-Untermenü, in dem sich die aussagenlogischen Operatoren befinden...

and auswählen

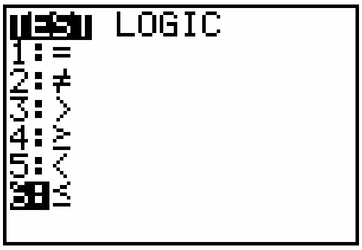
[ENTER] **oder** [1]



...von denen gleich der Erste in der Liste der von uns gesuchte logische Operator **and** ist. Da er bereits markiert ist, kann er einfach durch [ENTER] oder mit der Schnelleingabe [1] ausgewählt werden.

Relation markieren

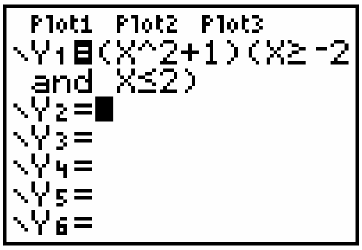
x [2nd] [MATH] ▲



Nachdem die Variable für die obere Grenze eingegeben ist, öffnen wir noch einmal das **TEST**-Menü und springen mit der ▲-Taste direkt an das Ende der Liste ...

Eingabe beenden

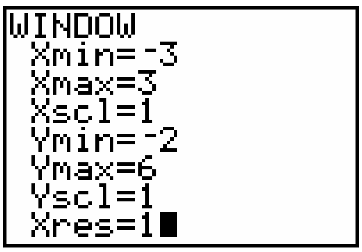
[ENTER] **oder** [6]
[2] [)] [ENTER]



...um dann mit [ENTER] das Kleiner oder Gleich-Zeichen auszuwählen. Dann folgt noch die obere Grenze und die Klammer wird wieder geschlossen. Beide Klammerpaare sind hier absolut notwendig!

Grafikfenster einstellen

[WINDOW] Parameter:
Xmin = -3; Xmax = 3; Xscl = 1
Ymin = -2; Ymax = 6; Yscl = 1; Xres = 1.

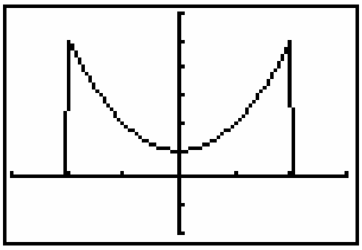


Die Grafikparameter werden entsprechend den Vorgaben eingestellt...

...DEFINIERTEN FUNKTION

Simulieren Sie die grafische Darstellung der auf dem Intervall $[-2, 2]$ definierten Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 + 1$ und den Achsenbegrenzungen $x_{\min} = -3$ sowie $x_{\max} = 3$.

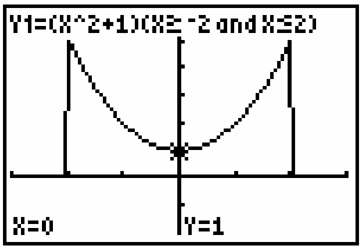
Graf zeichnen



[GRAPH]

...und mit der [GRAPH]-Taste die Grafik erzeugt. Sofort fällt auf, dass an beiden Rändern vom TI-84 eine Verbindung zur **x**-Achse mit eingezeichnet wird, die im folgenden näher untersucht werden soll.

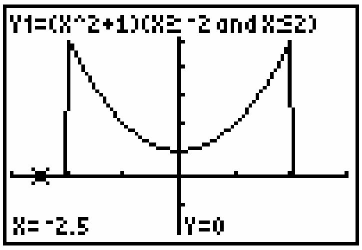
TRACE ausführen



[TRACE]

Dazu führen wir zunächst den [TRACE]-Befehl über seine eigene Taste aus. Der Cursor erscheint in der Mitte des Bildschirms auf dem Grafen, dessen Term in der obersten Zeile wie vorhin eingegeben erscheint

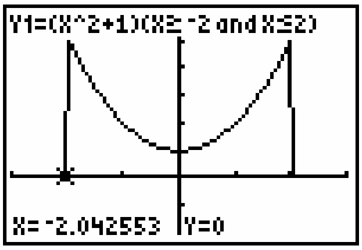
TRACE ausführen



[(-)] [2] [.] [5] [ENTER]

Wir untersuchen erst die linke Grenze und geben daher einen etwas kleineren Wert ein. Überraschenderweise bleibt der Funktionsterm in der ersten Zeile stehen und die Koordinaten des Cursors werden angezeigt...

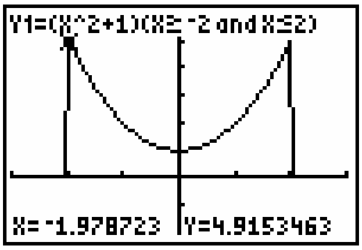
Graf scannen



▶ **(7 mal)**

...wobei die **y**-Koordinate bis in die Nähe des Sprunges Null bleibt. Tatsächlich also kennt der TI-84 keine intervallweise definierten Funktionen, sondern er setzt außerhalb der Grenzen die Funktionswerte lediglich zu null!

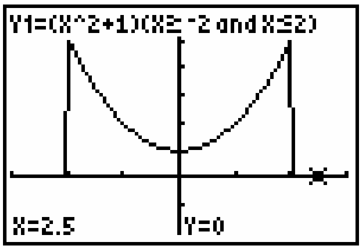
Graf scannen



▶

Geht man mit dem Cursor noch einen Schritt weiter nach rechts, so wird es hier deutlich, dass die nahezu senkrechte Linie keinen Funktionswert repräsentiert, sondern lediglich ein Artefakt des TI-84 darstellt. Bedingt durch seine Voreinstellung verbindet er implizit alle Werte miteinander.

TRACE ausführen



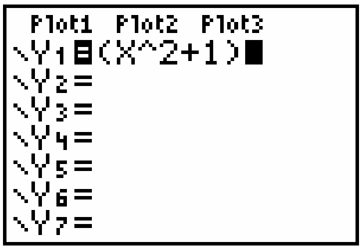
[2] [.] [5] [ENTER]

Da wir uns noch im **TRACE**-Modus befinden, können wir durch Eingabe eines entsprechenden **x**-Wertes nachvollziehen, dass die obigen Aussagen auch für den Bereich oberhalb der rechten Grenze gültig sind.

Grafen…

> Zeichnen Sie den Grafen der abschnittsweise definierten Funktion *f* mit $g(x) = x^2 + 1 \wedge x \le -1$ sowie $h(x) = -x + 1 \wedge x > -1$.

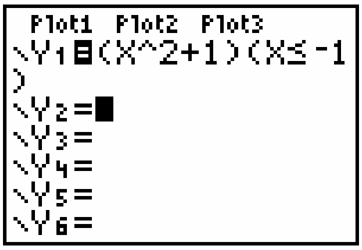
Term eingeben



[2nd] [+] [7] [1] [2] [ENTER] [CLEAR]
[Y=] $(x^2 + 1)$

Wir löschen erst den **RAM**-Speicher, öffnen dann den **Y=** Editor und geben den ersten Term in Klammern ein.

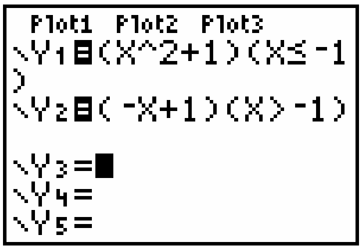
Eingabe beenden



[(] x [2nd] [MATH] [6] [(-)] [1] [)] [ENTER]

Der Gültigkeitsbereich wird ebenfalls in Klammern direkt dahinter eingegeben, wobei das Kleiner oder Gleich-Zeichen über die Schnelleingabe [6] aus dem **TEST**-Menü geholt wird.

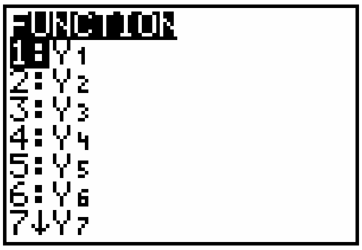
Term eingeben



$(-x+1)(x > -1)$ [ENTER]

Diese Zeile darf nicht als mathematisches Produkt interpretiert werden, sondern muss als syntaktisch erforderliche Zeichenfolge angesehen werden. Ein Gültigkeitsbereich bezieht sich immer nur auf einen direkt davor stehenden Term!

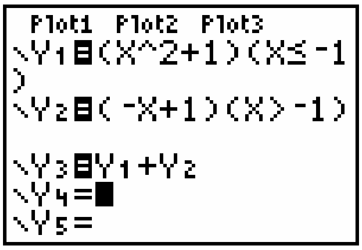
FUNCTION öffnen



[VARS] ▶
[ENTER] **oder** [1]

Um den letzten Term darstellen zu können, addieren wir die beiden eingegebenen Terme. Dazu benötigen wir die beiden Termnamen, die im **FUNCTION**-Untermenü des **VARS/Y-VARS**-Menüs stehen.

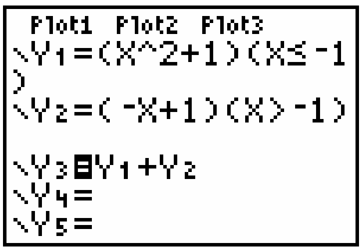
Term eingeben



[ENTER] **oder** [1]
[+] [VARS] ▶ [1] [2] [ENTER]

Dadurch, dass beide addiert werden, spielen die Funktionswerte Null (vgl. Seite 8) für die Summe natürlich keine Rolle mehr.

Term deselektieren



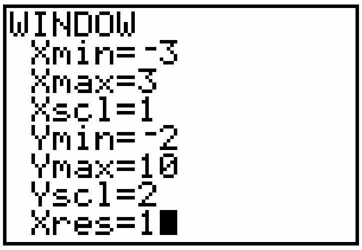
▲ ▲ ▲ ◀ [ENTER] ▼ [ENTER]

Da wir die beiden ersten Terme nicht grafisch darstellen wollen, deselektieren wir sie. Der Cursor ist hier unsichtbar über dem zweiten Gleichheitszeichen.

...ABSCHNITTSWEISE ZEICHNEN

Zeichnen Sie den Grafen der abschnittsweise definierten Funktion f mit $g(x) = x^2 + 1 \wedge x \leq -1$ sowie $h(x) = -x + 1 \wedge x > -1$.

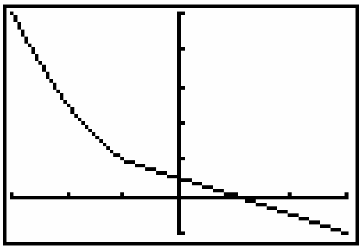
Grafikfenster einstellen



[WINDOW] Parameter:
Xmin = -3; Xmax = 3; Xscl = 1
Ymin = -2; Ymax = 10; Yscl = 2; Xres = 1.

Jetzt fehlen nur noch passende Grafikparameter...

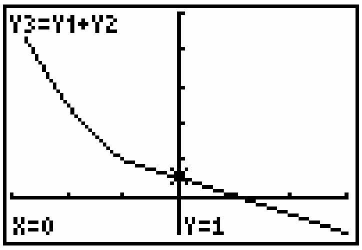
Graf zeichnen



[GRAPH]

...und der abschnittsweise gezeichnete Graf ist perfekt.

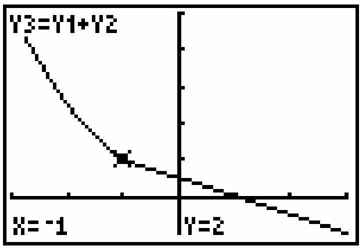
TRACE ausführen



[TRACE]

Wir wollen noch überprüfen, ob es an der „Nahtstelle“ ein Problem gibt und schalten dazu den TI-84 in den **TRACE**-Modus...

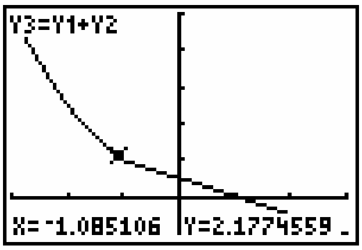
TRACE ausführen



[(-)] [1] [.] [0] [ENTER]

Den eventuell kritischen **x**-Wert geben wir über die Tastatur ein und springen zu der dazu gehörenden Stelle. Der angezeigte **y**-Wert entspricht den Erwartungen.

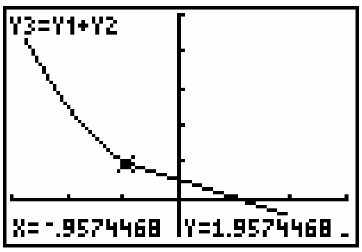
Graf scannen



◀

Auch einen Schritt links...

Graf scannen



[(-)] [1] [.] [0] [ENTER] ▶

...sowie einen Schritt rechts davon ist alles in Ordnung. Die Addition der beiden Einzelterme sorgt für eine gute abschnittsweise Darstellung eines Grafen.

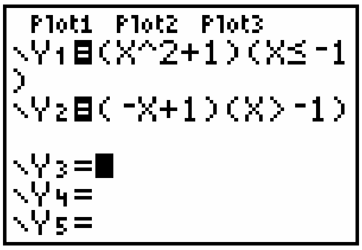
Grafisch auf...

Überprüfen Sie die abschnittsweise definierte Funktion f mit $g(x) = x^2 + 1 \wedge x \leq -1$ sowie $h(x) = -x + 1 \wedge x > -1$ an der Stelle $x = -1$ grafisch auf Differenzierbarkeit.

Term eingeben

[2nd] [+] [7] [1] [2] [ENTER] [CLEAR]
[Y=] $(x^2+1)(x \leq -1)$ [ENTER] $(-x+1)(x > -1)$ [ENTER]

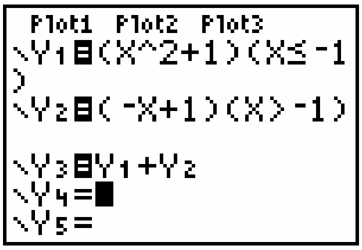
Der **RAM**-Speicher wird gelöscht, die beiden ersten Terme einzeln eingegeben.



Term eingeben

[VARS] ▶ [1] [1] [+] [VARS] ▶ [1] [2] [ENTER]

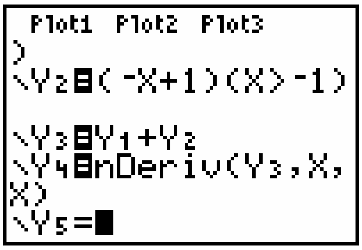
Wir definieren die abschnittsweise festgelegte Funktion über den Summenterm aus den beiden ersten Eingaben. Dazu holen wir die Systemnamen der beiden Terme aus dem **Function**-Untermenü im **VARS/Y-VARS** Menü.



Term eingeben

[MATH] [8] [VARS] ▶ [1] [3] [,] x [,] x [)] [ENTER]

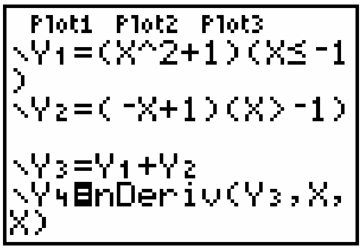
Nun geben wir die numerische Ableitung aus dem **MATH**-Menü ein und belegen sie mit dem Systemnamen **Y3** sowie der Variablen **x.** Als Stelle geben wir ebenfalls **x** ein, sodass alle **x**-Achsenwerte durchlaufen werden.



Term deselektieren

▲ ▲ ▲ ▲ ◀ [ENTER] ▼ [ENTER] ▼ [ENTER]

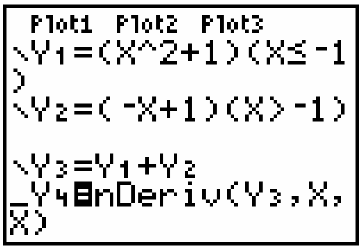
Da nur der Graf der Ableitungsfunktion gezeichnet werden soll, deaktivieren wir die drei anderen Einträge. Dazu setzen wir den Cursor jeweils auf das Gleichheitszeichen und betätigen [ENTER].



Grafikstil markieren

▼ ◀

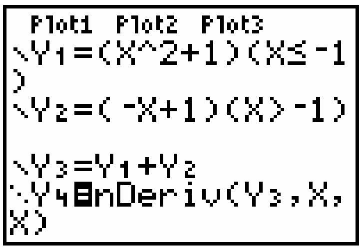
Wir stellen jetzt noch eine andere Darstellungsweise für den Grafen ein. Dazu wird der Cursor in die erste Spalte verschoben. Hier ist bislang überall ein Strich zu sehen, was bedeutet, dass der Graf durchgehend gezeichnet wird.



Grafikstil auswählen

[ENTER] **(6 mal)**

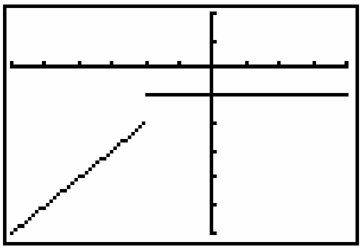
Mithilfe der [ENTER]-Taste kann man zwischen den verschiedenen Grafikstilen umschalten. Wir wählen eine gepunktete Darstellung. Das bedeutet, dass die einzelnen berechneten Pixelwerte nicht mehr untereinander verbunden werden.



...Differenzierbarkeit überprüfen

Überprüfen Sie die abschnittsweise definierte Funktion *f* mit $g(x) = x^2 + 1 \wedge x \leq -1$ sowie $h(x) = -x + 1 \wedge x > -1$ an der Stelle $x = -1$ grafisch auf Differenzierbarkeit.

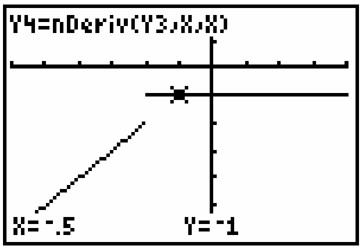
Graf zeichnen



`WINDOW` Parameter:
Xmin = -3; Xmax = 2; Xscl = 0,5
Ymin = -6; Ymax = 2; Yscl = 1; Xres = 1. `GRAPH`

Mit den entsprechenden Einstellungen für das Grafikfenster wird nun der Graf in einer Form dargestellt, die hier augenscheinlich einen Sprung erscheinen lässt.

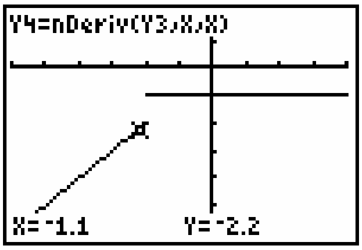
TRACE ausführen



`TRACE`

Im **TRACE**-Modus untersuchen wir den Grafen der Ableitungsfunktion näher. Zunächst erscheint der Cursor in der Mitte des Bildschirms auf dem Grafen. Der **y**-Wert ist perfekt, denn hier gilt der lineare Term.

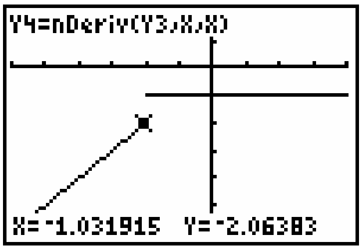
TRACE ausführen



`(-)` `1` `.` `1` `ENTER`

Nun schauen wir auf die andere Seite der „Nahtstelle“ indem wir direkt einen Wert für die **x**-Koordinate eingeben. Auch hier entspricht der angezeigte **y**-Wert den Erwartungen an die Ableitung einer Parabel.

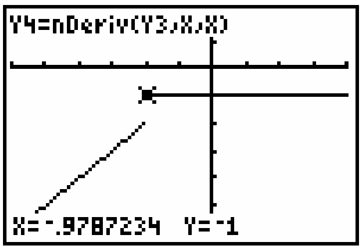
Graf scannen



▶

Bewegt man nun den Cursor einen Schritt nach rechts, so verbleibt er zunächst noch auf dem ansteigenden Teil des Grafen...

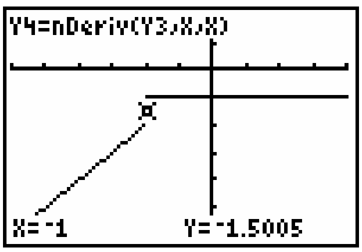
Graf scannen



▶

...um nach einem weiteren Schritt auf den horizontalen Teil zu springen. Die Einstellung des Bildschirms erlaubt es uns nicht direkt den **x**-Wert **–1,0** mit dem Cursor zu erreichen. Daher geben wir ihn im folgenden über die Tastatur ein...

TRACE ausführen



`(-)` `1` `.` `0` `ENTER`

...und stellen fest, dass der TI-84 hier entsprechend seiner Programmierung über den symmetrischen Differenzenquotienten als Sekantennäherung sehr wohl einen Wert liefert und auch liefern muss.

Im Sinne der Schulmathematik (Gleichheit der links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Differenzenquotienten) ist die Funktion der Aufgabe bei **x=-1,0** nicht differenzierbar. Der TI-84 verwendet aber als Näherung für den Differenzialquotienten den symmetrischen Differenzenquotient!