Informationen aus Sätzen verstehen lernen

Dr. Ingeborg Löffler

Die erste Lerntechnik, die ich heute vorstellen möchte, richtet sich auf ein schülergerechtes Interpretieren von Sätzen und Regeln aus dem Mathematikunterricht der Mittelstufe und kann von Schülerinnen und Schülern in relativ kurzer Zeit unter Anleitung erlernt und selbstständig auch zuhause praktiziert werden. Durch spezielle Übungen, abgestimmt in drei Stufen, bekommt der Lernende einen weitaus stärkeren inhaltlichen Bezug zu den Sätzen als durch reines Auswendiglernen.

1 Die Quantität eines Satzes

Unsere Hauptquellen für Informationen sind Bücher und Internet. Das gilt auch für das Fach Mathematik. In Lehrbüchern der Schule finden wir ab Klasse 7 an verschiedenen Stellen so genannte *mathematische Sätze*, die man als sehr wichtige Erkenntnisse der Mathematik in kompakter Form verstehen kann. Sie regeln maßgeblich das mathematische Denken und Handeln beim Lösen mathematischer oder mathematisierter Aufgabenstellungen. Der Mathematiker versteht unter einem Satz schlechthin eine wahre Aussage.

Jeder Satz enthält eine quantitative Information über bestimmte Objekte einer vorgegebenen Grundmenge.

Beispiele:

Satz 1 Jede ganze Zahl hat genau einen Vorgänger.

Satz 2 Jede natürliche Zahl hat höchstens einen Vorgänger.

Satz 3 In jedem Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite.

Satz 4 Es gibt positive rationale Zahlen, die in der Menge der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel besitzen.

Satz 5 Das Volumen V jeder Pyramide mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhe h beträgt $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$.

Satz 6 Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

(3) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Frage dich zuerst: *Welche quantitative Information enthält der Satz? Welche Grundmenge wird darin beschrieben?*

	Quantitative Information	**Grundmenge**
Zu 1)	Jede ganze Zahl hat genau einen…	Menge aller ganzen Zahlen
Zu 2)	Jede natürliche Zahl hat höchstens einen…	Menge aller natürlichen Zahlen
Zu 3)	In jedem Dreieck…	Menge aller Dreiecke
Zu 4)	Es gibt positive rationale Zahlen…	Menge aller positiven rationalen Zahlen
Zu 5)	… jeder Pyramide…	Menge aller Pyramiden
Zu 6)	Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt…	Menge aller reellen Zahlen

Die Quantität spiegelt sich in unterschiedlichen Standardformulierungen wider:

- in jedem
- jeder
- für alle
- für beliebige
- es gibt keine
- es gibt einen (mindestens einen)
- es gibt höchstens einen
- es gibt genau einen

u.v.a.

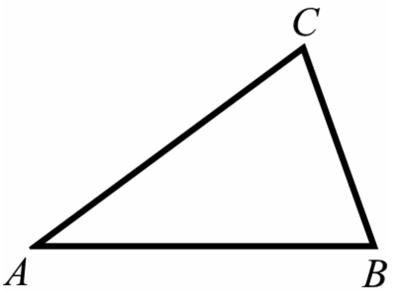
Hier beginnt meine Lerntechnik. Ich nenne sie *Mein-Aussagen* und fordere die Schülerin auf: *Suche aus der jeweiligen Grundmenge einen konkreten Vertreter heraus. Beginne deine Formulierung mit dem Wort Mein(e). Bezeichne alle deine Elemente der jeweiligen Grundmenge so genau wie möglich.*

	Quantitative Information	***Mein-Formulierung**-Anfang*
Zu 1)	Jede ganze Zahl hat genau einen…	*Meine ganze Zahl* 10 hat genau einen…
Zu 2)	Jede natürliche Zahl hat höchstens einen…	*Meine natürliche Zahl* 124 hat höchstens einen…
Zu 3)	In jedem Dreieck…	*Mein Dreieck ABC mit* $a = 5\,cm, b = 6\,cm, c = 8\,cm$ …
Zu 4)	Es gibt positive rationale Zahlen…	*Meine positive rationale Zahl 5…*
Zu 5)	… jeder Pyramide…	*Meine Pyramide RSTU mit* $RS = 5\,cm,\ ST = 3\,cm, RT = 6\,cm,$ $h = 8\,cm$ …
Zu 6)	Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt…	*Meine reellen Zahlen* $a = 0.5, b = -4$ …

Für weitere Erläuterungen betrachten wir den Satz mit dem Namen Dreiecksungleichung: *In jedem Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite.*

2.1 Mein-Aussagen erster Stufe

Wir nehmen die Situation an, dass dieser Satz ab der nächsten Mathematikstunde geistig verfügbar sein soll, um ihn dann schnell und sicher in Aufgaben anwenden zu können.
Wir überlegen und folgern zuhause: Wenn der Satz *auf alle* Dreiecke zutrifft, dann muss er auch auf *mein ausgedachtes* und *beschriftetes* Dreieck ABC zutreffen. Seine Seitenlängen sind mir durch Messungen bekannt. *Mein Dreieck* ABC *existiert mit* $a = 5\,cm, b = 6\,cm, c = 8\,cm$.
Wir formulieren unsere erste *Mein-Aussage erster Stufe*:



Für mein Dreieck *ABC ist die Summe der Längen zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite.*

und überprüfen darin deren Wahrheitsgehalt. Zuvor aber übersetzen wir sie in die übliche mathematische Symbolik und verwenden dabei die eingeführten Bezeichner a, b, c.

Kategorien	**Mathematische Symbolik**
„Summe der Längen zweier Seiten“	$a + b \quad (= 11\,cm)$
„größer als“	$>$
„die Länge der dritten Seite“	$c \quad (= 8\,cm)$
Test 1: $11\,cm > 8\,cm$ ist eine *wahre* Aussage.	

Schnell erkennen wir, dass es für das Dreieck ABC noch andere Möglichkeiten gibt, die erhobenen Kategorien weiter auszutesten.

Kategorien	**Mathematische Symbolik**
„Summe der Längen zweier Seiten“	$a + c \quad (= 13\,cm)$
„größer als“	$>$
„die Länge der dritten Seite“	$b \quad (= 6\,cm)$
Test 2: $13\,cm > 6\,cm$ ist eine *wahre* Aussage.	

Kategorien	**Mathematische Symbolik**
„Summe der Längen zweier Seiten“	$b+c \quad (=14\,cm)$
„größer als“	$>$
„die Länge der dritten Seite“	$a \quad (=5\,cm)$
Test 3: $14\,cm > 5\,cm$ ist eine *wahre* Aussage.	

Das Ziel in der ersten Stufe besteht nun darin, den Wahrheitswert „wahr“ im jeweiligen Test zu bestätigen. Wie viele Mein-Aussagen im Einzelfall dafür zu bilden sind, hängt ganz davon ab, inwieweit es dem Schüler von selbst gelingen mag, eine Verallgemeinerung derart: „*Alle meine Tests* ergeben mit: *[Summe der Längen zweier Seiten] > [die Länge der dritten Seite]* stets eine *wahre* Aussage.“ formulieren zu können.

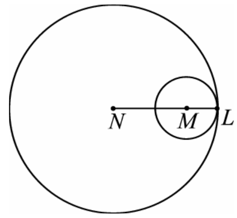
2.2 Mein-Aussagen zweiter Stufe

Wir bilden weitere Mein-Aussagen, indem wir uns immer neue Dreiecke mit immer neuen Seitenlängen ausdenken. Dabei interessieren wir uns für mehr Variationen in den einzelnen Kategorien. Neben den wahren Mein-Aussagen wollen wir bewusst auch falsche erzeugen. Um effektiv die Auswertungen darstellen zu können, legen wir ein neue Tabelle an.

Meine Dreiecke	**Wahrheitswerte**		
Dreieck XYZ existiert mit: $x=44\,mm$; $y=27\,mm$; $z=25\,mm$	***Summe der Längen zweier Seiten in mm***	***größer als***	***die Länge der dritten Seite in mm***
	$x+y \quad (71)$	$> \quad (wahr)$	$z \quad (25)$
	$x+z \quad (69)$	$> \quad (wahr)$	$y \quad (27)$
	$y+z \quad (52)$	$> \quad (wahr)$	$x \quad (44)$
Dreieck LMN existiert mit: $l=26\,mm$; $m=38\,mm$; $n=12\,mm$	$l+m \quad (64)$	$> \quad (wahr)$	$m \quad (12)$
	$l+n \quad (38)$	$> \quad (falsch)$	$m \quad (38)$
	$m+n \quad (50)$	$> \quad (wahr)$	$l \quad (26)$

Bei Auswertung dieser Tabelle richtet sich unser Blick natürlich auf die Falschaussage des Dreiecks LMN. Wir wollen verstehen lernen, was hier passiert ist. Es entwickelt sich schnell die entscheidende Frage:

Was ist an diesem Dreieck LMN das Besondere? Wir versuchen das Dreieck LMN zu konstruieren. Der Konstruktionsversuch muss misslingen, denn das Dreieck LMN existiert nicht. *Wie lässt sich diese Tatsache begründen?*



Wir formulieren unseren zu lernenden Satz nach einem bestimmten Muster um, wobei wir darauf achten müssen, dass die Hauptinformation des Satzes sich dabei nicht verändern darf. Als erste Umformulierung streben wir die *Wenn-Dann-Form* an. Sie ist immer von einem Satz herstellbar, wenn dieser in zwei Aussagen zerlegbar ist, die die Voraussetzung und die Behauptung des Satzes bilden.

Muster I: ***Wenn*** *[Voraussetzung],* ***dann*** *[Behauptung].*

Woran erkennen wir die Voraussetzung eines Satzes? Veränderungen in den Mein-Aussagen haben wir durch die Wahl neuer Dreiecke innerhalb der Voraussetzung herbeigeführt. Die Voraussetzung unseres Satzes lautet also: *Es existiert ein Dreieck mit seinen Seitenlängen...* Der zweite Teil des Satzes bildet die Behauptung: *Die Summe der Längen zweier Seiten ist größer als die Länge der dritten Seite.* In den Tests zu den Mein-Aussagen wurde genau dieser Teil des Satzes durch „wahr“ oder „falsch“ bewertet.

Voraussetzung	Behauptung
Ein Dreieck existiert.	Die Summe der Längen zweier Seiten ist größer als die Länge der dritten Seite.

Wir bauen aus diesen beiden Aussagen, die Wenn-Dann-Form auf: *Wenn* ein Dreieck existiert, *dann* ist die Summe der Längen zweier Seiten größer als die Länge der dritten Seite.

Weiter geht es mit einer zweiten Umformulierung. Dazu bilden wir die gegenteiligen Aussagen von Voraussetzung und Behauptung. Der Mathematiker sagt dazu: Man bildet von Voraussetzung und Behauptung die *Negationen*.

Negation der Voraussetzung	Negation der Behauptung
Es existiert *kein* Dreieck.	Die Summe der Längen zweier Seiten ist *nicht* größer als die Länge der dritten Seite.

Aus diesen beiden gegenteiligen Aussagen entsteht nun eine neue Aussage mit *gleichem* Informationsgehalt. Wieder wird die Wenn-Dann-Form verwendet, diesmal aber nach dem

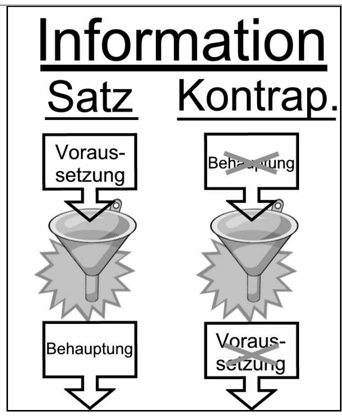
Muster II: ***Wenn*** *[Negation der Behauptung],* ***dann*** *[Negation der Voraussetzung].*

Der Mathematiker spricht hierbei von der Bildung der *Kontraposition*. Wir erhalten für unseren Satz die *gleichwertige* Formulierung: ***Wenn*** *die Summe zweier Seitenlängen <u>nicht größer</u> als die dritte Seitenlänge ist,* ***dann*** *existiert <u>kein Dreieck</u>.*

Unser Versuch, das Dreieck LMN konstruieren zu wollen, musste also auf Grund unseres Satzes automatisch scheitern. Die Streckenlängen

$l = 26\,mm;\ m = 38\,mm;\ n = 12\,mm$ sind für die Konstruktion eines Dreiecks völlig ungeeignet.

Merke: Jeder Wenn-Dann-Satz besitzt genau eine Kontraposition. Satz und Kontraposition sind zwei verschiedene Formulierungen für ein und dieselbe Hauptinformation.



Satz:

$$\boxed{\textit{Voraussetzung}} \Rightarrow \boxed{\textit{Behauptung}}$$

Kontraposition:

$$\boxed{\textit{Gegenteil}\boxed{\textit{Behauptung}}} \Rightarrow \boxed{\textit{Gegenteil}\boxed{\textit{Voraussetzung}}}$$

Übung: Bilde die Kontraposition zu der Aussage: Wenn 4 ein Teiler der natürlichen Zahl n ist, dann ist n auch durch 2 teilbar.
(Antwort: Wenn die natürliche Zahl n nicht durch 2 teilbar ist, dann ist n auch nicht durch 4 teilbar.)

2.3 Mein-Aussage(*formen*) dritter Stufe

Die letzte Stufe der Mein-Aussagen soll uns ein kleines Stück in die Gedankenwelt der Konstruktion einfacher Anwendungsaufgaben begleiten. Zu diesem Zweck denken wir uns Variablen als unbekannte Zahlen oder Größen aus und setzen sie an verschiedene Stellen für Zahlen oder Größen bekannter Mein-Aussagen ein. Dabei berücksichtigen wir die Grundmenge der Quantität. Betrachten wir als Beispiel die bekannte Tabelle:

Mein Dreieck	**Wahrheitswerte**		
Dreieck XYZ: $x = \boxed{\cancel{44\,mm}}$ $y = 27\,mm;$ $z = 25\,mm$	***Summe der Längen zweier Seiten in mm***	***größer als***	***die Länge der dritten Seite in mm***
	$x+y \quad (71)$	$> \quad (wahr)$	$z \quad (25)$
	$x+z \quad (69)$	$> \quad (wahr)$	$y \quad (27)$
	$y+z \quad (52)$	$> \quad (wahr)$	$x \quad (44)$

Die Länge der Seite x des Dreiecks XYZ ersetzen wir durch die *unbekannte* Längenzahl t (mm). Die Tests zur Bestimmung der Wahrheitswerte können nun nicht mehr durchgeführt werden, da der Seite x die unbekannte Längenzahl t zugewiesen wurde. Die Ungleichungen $x+y>z$; $x+z>y$ und $y+z>x$ stellen auf Grund des fehlenden Wahrheitswertes keine Aussagen mehr dar. Es handelt sich dabei um *Aussageformen*.

<table>
<tr><th>Mein Dreieck</th><th colspan="3">Wahrheitswerte</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Dreieck XYZ:
$x = \boxed{t}$;
$y = 27mm$;
$z = 25\,mm$</td><td>Summe der Längen zweier Seiten in mm</td><td>größer als</td><td>die Länge der dritten Seite in mm</td></tr>
<tr><td>$x+y \quad (\ldots)$</td><td>$> \quad (\ldots.)$</td><td>$z \quad (25)$</td></tr>
<tr><td>$x+z \quad (\ldots.)$</td><td>$> \quad (\ldots.)$</td><td>$y \quad (27)$</td></tr>
<tr><td>$y+z \quad (52)$</td><td>$> \quad (\ldots.)$</td><td>$x \quad (t)$</td></tr>
</table>

Erst wenn t als Längenzahl bekannt ist, werden aus den Aussageformen wieder Aussagen. Zur Gestaltung wahrer und falscher Aussagen kann in Verbindung mit den Formulierungen (1) und (2) eine einfache Anwendungsaufgabe entwickelt werden.

Formale Aufgabe: Für welchen Wert t gehen die Ungleichungen $x+y>z$; $x+z>y$ und $y+z>x$ in eine wahre bzw. falsche Aussage über?

Anwendungsaufgaben: a) Gib eine Längenzahl für

3 Individuelles Lernen und individueller Leistungsfortschritt

Der individuelle Erfolg der Lerntechnik der Mein-Aussagen hängt vor allem davon ab, inwieweit der Schüler nach einer ausreichenden Phase der Anleitung

- in der Lage ist, jede Stufe der Mein-Aussagen selbstständig ausführen zu können,
- beurteilen kann, ob eine gewisse Sicherheit und beginnende Routine in der Ausführung der persönlichen Beispiele eintritt oder nicht, um den Zeitpunkt zu bestimmen, in die nächst höhere Stufe überzutreten,
- in der Lage ist, die notwendigen Rechnungen selbstständig erledigen zu können,
- im Umgang mit Variablen vertraut ist.

Ein objektives Lernziel, so wie im Schulunterricht gibt es hier nicht. Vielmehr soll das Maß aller Übungen in Qualität und Quantität vom Schüler selbst festgelegt werden, wobei hier eine Grenze nach oben nicht existiert. Die Herausbildung der Eigenverantwortung beim Lernenden wird mit dieser Lerntechnik gefördert und gestärkt. Der Schüler steht immer wieder vor der Beurteilung der zu entscheidenden Frage: Wie viele Mein-Aussagen sind für *mich* noch notwendig, um eine Verallgemeinerung als persönliche Erfahrung formulieren zu können? Diese Zahl ist eine individuelle Zahl und kann nicht objektiv vorgegeben werden.

Teilziele der ersten Stufe:

- Quantitative Formulierungen im Satz erkennen können,
- die Restinformation des Satzes in einzelne, auswertbare Kategorien zerlegen können,
- den Satz in die Wenn-Dann-Form aufschreiben können (wenn überhaupt möglich),
- Zahlen, Größen, Strecken, Dreiecke,… (allgemein Objekte) aus dem Grundbereich der Quantität wählen können,
- einen sinnvollen Bezug zwischen dem selbst ausgedachten Beispiel und den einzelnen Kategorien der Behauptung durch Operationen und Relationen herstellen können,
- mit den selbst gewählten Objekten rechnen, zeichnen und messen können.

Weitere Teilziele der zweiten und dritten Stufe:

- möglichst ein breites und ausgewogenes Spektrum verschiedenartiger Objekten aus dem Grundbereich benennen können,
- Variationen in den Aussagewerten der Behauptung durch Änderungen in der Voraussetzung herstellen können,
- mit Variablen als unbekannte Zahlen oder Größen umgehen können,
- einfache Aufgaben für die Variablen formulieren können,
- die Kontraposition eines Wenn-Dann-Satzes aufstellen können
- eine Erfahrung über den Satz als Fazit formulieren können.

Wenn der Schüler mit dieser Erfahrung in die nächste Mathematikstunde geht, wird er mit Sicherheit mehr Anwendungsaufgaben zu diesem Satz von selbst erledigen können, als durch „inhaltsleeres Auswendiglernen“. Darin ist der individuelle Erfolg messbar.

Eine Reihe interessanter Anregungen für eine Weiterentwicklung dieser Lerntechnik unter Einbeziehung moderner Taschenrechner erhielt ich auf dem Kongress für *„Individuelle mathematische Förderung“* in Prag 2003. In einer der nächsten Ausgaben dieses Magazins werde ich über meine „neuen“ Erfahrungen auf diesem Gebiet berichten.

Lösen goniometrischer Gleichungen

(Eine GNA für den Voyage™ 200)

Eine Gleichung, bei der die Lösungsvariable im Argument von Winkelfunktionen auftritt, heißt *goniometrische Gleichung*.

Aufgabe: Lösen Sie die goniometrischen Gleichungen.

a) $\cos(4x) = 0.5$ b) $\cos(x) = \sin^2(x)$

Zu Aufgabe a)

Gradmaß auswählen

Nachdem wir den Startzustand am Rechner hergestellt haben wählen wir im [MODE]-Menü unter der Rubrik *Winkel* mittels Richtungstaste ◯ das Gradmaß aus. Wir drücken *zweimal* die [ENTER]-Taste.