Beweis zu (3) und (4):

Für den Vektor $a := \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$; $x_a \in \mathbb{R}, y_a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{SkalarP}(a, \lambda \cdot a) &= \lambda \cdot x_a{}^2 + \lambda \cdot y_a{}^2 \\ &= \lambda \cdot \left(x_a{}^2 + y_a{}^2 \right) \\ &= \lambda \cdot \left(\text{Norm}(a) \right)^2 \\ &= \lambda \cdot \text{SkalarP}(a, a) \end{aligned}$$

was zu beweisen war

Lern**auftrag** 3

Beweisen Sie Aussagen (5a, b).

Für alle $a \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &\text{SkalarP}(a, a) \geq 0; \\ &\text{SkalarP}(a, a) = 0 \text{ nur für } a = \vec{0} \end{aligned} \qquad (5a,b)$$

Lern**auftrag** 4

Belegen Sie durch zwei Zahlenbeispiele für $a \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq \vec{0}$, dass die Gleichung $\text{Skalar}(a, x) = r$ mit $r \in \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^2$ nicht eindeutig lösbar ist.

Lern**auftrag** 5

Versuchen Sie zu dem Skalarprodukt eine passende Umkehroperation, die „Skalardivision durch $a \in \mathbb{R}^2$" zu definieren. Welches Problem tritt dabei auf?

3 Mein-Aussagen – 2. Teil

(Fortsetzung des Beitrages von Frau Dr. Ingeborg Löffler aus Ausgabe 01/05)

3.1 Die drei Ebenen eines mathematischen Satzes

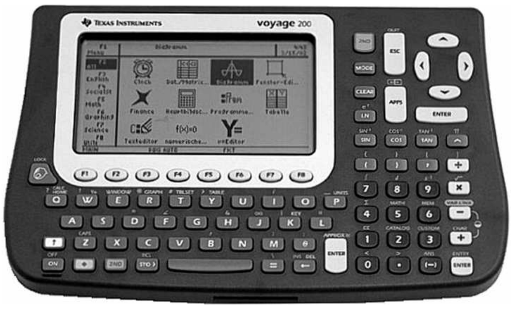
Bei den Übungen in den Mein-Aussagen haben wir uns bisher auf die Informationen der quantitativen Ebene konzentriert. Hier noch einmal wichtige Formulierungshinweise für diese spezielle Art der Information:

- „für alle…",
- „es gibt ein…",
- „für jedes beliebige…",
- „für höchstens ein…",
- „für mindestens ein…",

Um möglichst über einen langen Zeitraum hinweg über den Inhalt von Sätzen informativ verfügen zu können, ist im besonderen Maße die strukturelle Ebene und die Objektebene eines mathematischen Satzes herauszuerarbeiten.
Woran erkenne ich die Informationen der Objektebene?
Woran erkenne ich die Informationen der strukturelle Ebene?
Für viele Beispiele gibt es hierfür einen praktischen Helfer, den Taschenrechner. Wir arbeiten mit einem Taschenrechner, der zu den so genannten CAS-Rechner zählt. Die Abkürzung CAS steht für Computeralgebrasysteme.

3.2 Der Voyage™ 200, ein nützlicher Helfer und Experte

Dieser spezielle Taschenrechner, der über ein CAS verfügt, wird bereits seit einigen Jahren an sehr vielen deutschen Schulen und Schulen im Ausland erfolgreich eingesetzt. Er gehört derzeit zu den leistungsstärksten Rechnern überhaupt. Ein wahrer Meister seiner Zunft.



[B 3.1]

Dieser Rechner kann uns bei der Realisierung wertvoller Unterrichtsziele, für die Herausbildung positiver Lernbedingungen und Haltungen von großem Nutzen sein.

3.3 Binomische Formeln in Mein-Aussagen

Am Anfang unserer Arbeit setzen wir wieder das zu lernende Wissen und kopieren Zeichen für Zeichen aus einem Lehrbuch.

Beispiel 2: Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart, München, Düsseldorf Leipzig, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium in Baden-Württemberg, 1. Auflage, 1995; Klasse 8, Seite 86
Dort heißt es:

„Um das praktische Rechnen zu erleichtern, merken wir uns:

$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ (Erste binomische Formel)

$(a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$ (Zweite binomische Formel)

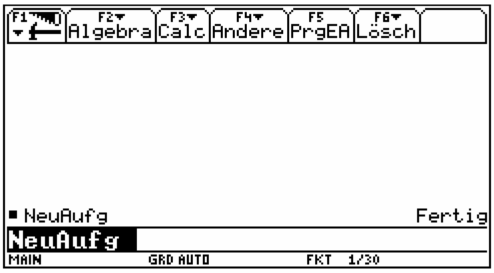
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (Dritte binomische Formel)“

Beim Lesen der drei Gleichungen fällt uns sofort auf, dass auf der quantitativen Ebene keine Informationen vorliegen. Ist das so gewollt oder gibt es tatsächlich keine derartigen Informationen. Einen Hinweis, der uns über die Bedeutung der drei Formeln zum Nachdenken anregen kann, ergibt sich aus der Auswertung der drei Gleichungen nach Eingabe in den Voyage™ 200.

(Wertvolle Hinweise für eine effektive Nutzung und Bedienung des Rechners finden Sie im Begleitheft des Rechners. Es trägt den Namen „Das Einmaleins des Voyage™ 200“ aus dem Schumann`s Verlagshaus.)

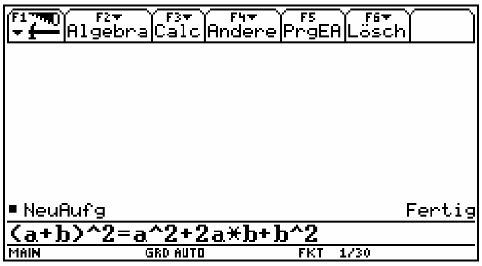
Gib die drei Gleichungen im AUTO-Modus ein. Halte dich genau an die Vorgaben. Schließe jede Eingabe mit der [ENTER]-Taste ab.

HOME/



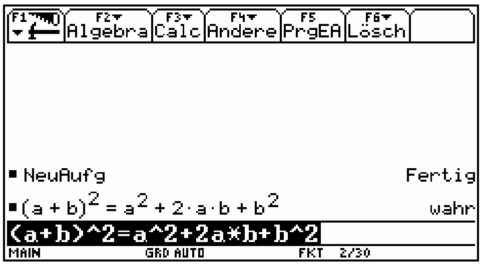
[B 3.2]

⦿ Drücke: [(] [A] [+] [B] [)] [^] [2] [=]
[A] [^] [2] [+] [2] [A] [×] [B] [+] [B] [^] [2]



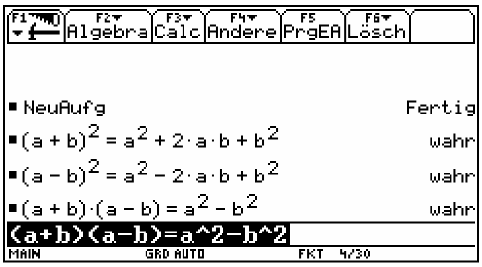
[B 3.3]

⦿ Drücke: [ENTER]



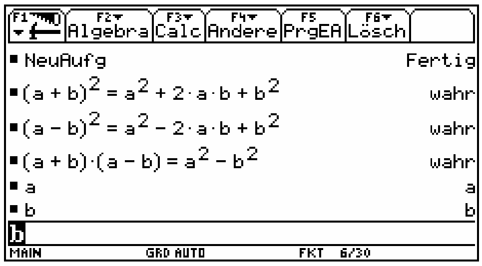
[B 3.4]

⦿ Drücke: [(] [A] [-] [B] [)] [^] [2] [=]
[A] [^] [2] [-] [2] [A] [×] [B] [+] [B] [^] [2]
[ENTER]
[(] [A] [+] [B] [)] [(] [A] [-] [B] [)] [=]
[A] [^] [2] [-] [B] [^] [2]
[ENTER]



[B 3.5]

⦿ Drücke: A ENTER B ENTER



[B 3.6]

Jede Binomische Formel wird im Rechner mit „wahr“ ausgewertet. Dabei haben die Programmierer dieses CAS eine Interpretation, bezogen auf den Zahlenbereich der reellen Zahlen, vorweggenommen.
Offensichtlich sind die drei Gleichungen Teile von drei wahren Aussagen. In der Merkregel wurde jene Information weggelassen, die uns die Frage beantworten kann: Für welche Elemente a und b werden die drei Gleichungen wahr? Wir suchen in einem anderen Schullehrbuch und werden auch fündig.

Beispiel 3 (Westermann Schulbuchverlag GmbH, Braunschweig 1990; 1. Auflage)
Klasse 8, Seite 86

„Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ (erste binomische Formel)

$(a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$ (zweite binomische Formel)

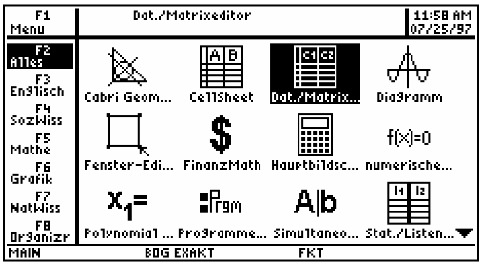
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (dritte binomische Formel)“

Hier steht also am Anfang: „Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt: … „, was soviel bedeutet: Für alle rationalen Zahlen a und b gelten die drei Gleichungen.
Erste Binomische Formel - Mein-Aussagen erster Stufe:
Für $a \in \mathbb{Q}$ denken wir ich mir die rationale Zahl 2 aus.
Für $b \in \mathbb{Q}$ denken wir ich mir die rationale Zahl 5 aus.
Dann gilt nach der ersten Binomischen Formel:

$a \in \mathbb{Q}$	$b \in \mathbb{Q}$	Linke Seite: $(a+b)^2$	Rechte Seite: $a^2 + 2a \cdot b + b^2$	Aussage lS = rS
2	5	49	49	49 = 49 wahr

Diese Tabelle steht uns für eine interaktive Rechneranwendung als Vorlage zur Verfügung. In relativ kurzer Zeit können wir mithilfe eines von uns angelegten elektronischen Rechenblattes viele Mein-Aussagen durch Neubelegungen einzelner Tabellenzellen erzeugen, ohne dabei uns verrechnen zu können. An der Verbesserung unserer persönlichen Rechenleistung arbeiten wir solange nicht weiter, bis wir die Bedeutung dieser Formel benennen können. Wir holen uns daher die entsprechende Werkzeugunterstützung vom Rechner.

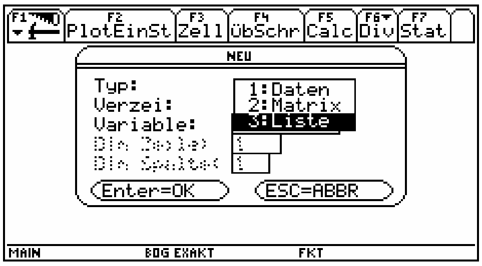
Stelle den Startzustand her und führe anschließend eine HOME-Bereinigung durch. Rufe dann den Generalbildschirm auf und markiere darin mithilfe der Richtungstasten das Icon Dat./Matrix.



[B 3.7]

⦿ Drücke: [ENTER][3] ► ▼ ▼

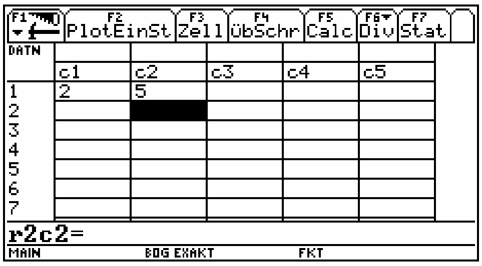
Für unser künftiges interaktives Rechenblatt in Tabellenform vergeben wir im Listeneditor den Namen $a01$. Über diesen Namen können wir später das Rechenblatt wieder aufrufen.



[B 3.8]

Dann belegen wir in den ersten beiden Spalten jeweils die ersten beiden Zellen mit unseren ausgedachten Zahlen 2 und 5.

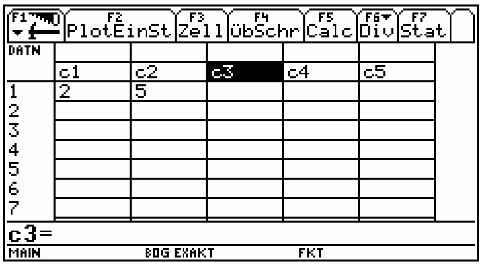
⦿ Drücke: [ENTER] ▼ ▼ [A][0][1]
[ENTER][ENTER]
[2][ENTER] ► ▲
[5][ENTER]



[B 3.9]

Wir markieren in der dritten Spalte den Bezeichner $c3$. Hier hinterlegen wir den Term $(a+b)^2$ in der Sprache des Rechners.

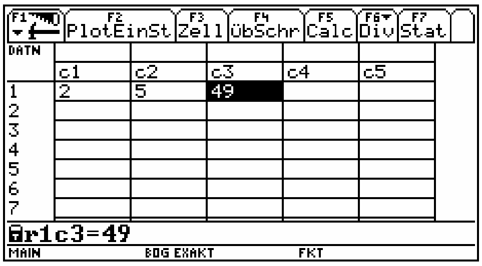
⦿ Drücke: ► ▲ ▲



[B 3.10]

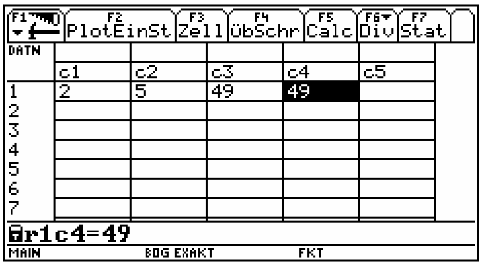
⦿ Drücke: [ENTER]
[(][C][1][+][C][2][)][^][2]
[ENTER]

Die Zahl 49 in der dritten Spalte hat bereits der Rechner auf Grund unserer Eingaben berechnet und in die dortige erste Zelle von selbst eingetragen. In ähnlicher Weise legen wir den Bezeichner $c4$ zur automatischen Berechnung des Terms $a^2+2a\cdot b+b^2$ an.



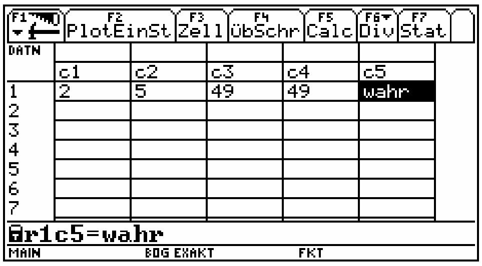
[B 3.11]

⦿ Drücke: → ↑ [ENTER]
[C][1][^][2]
[+][2][×][C][1][×][C][2]
[+][C][2][^][2]
[ENTER]



[B 3.12]

Auch die Relationsauswertung in der Spalte *c*5 erfolgt rechnergestützt.
⦿ Drücke: → ↑ [ENTER]
[C][3][=][C][4][ENTER]

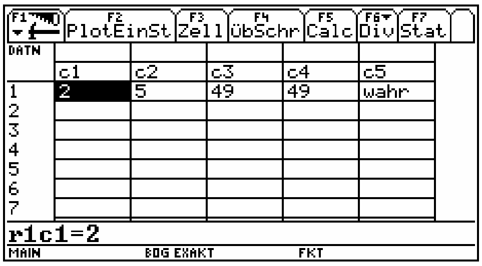


[B 3.13]

Das Rechenblatt ist in seinem grundsätzlichen Aufbau fertig und steht uns für weitere Berechnungen zur Verfügung.

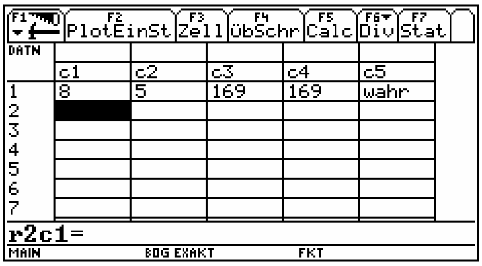
Wir gehen zur zweiten Stufe unserer Mein-Aussagen über und testen unser Rechenblatt aus.

Wir springen mit der Richtungstaste ← wieder in die erste Zelle der ersten Spalte und markieren die Zahl 2.
⦿ Drücke: ← ← ← ←
Wir überschreiben die Zahl 2 mit der Zahl 8.



[B 3.14]

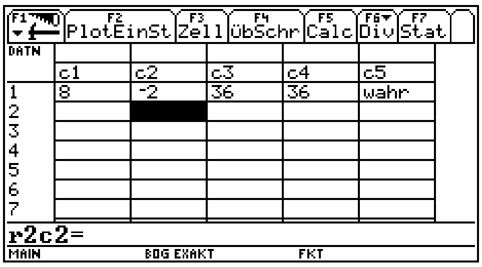
⦿ Drücke: [8][ENTER]
Beschreibe, was in den anderen angelegten Spalten *c*2 bis *c*5 passiert ist.



[B 3.15]

Eine dritte Mein-Aussage kann dann so beispielsweise vorbereitet werden:
⦿ Drücke: → ↑ [(-)][2][ENTER]

Beschreibe, was jetzt passiert ist und interpretiere die neue Zeile als deine Mein-Aussage. Ergänze dabei: Wenn $a = 8$ und $b = -2$, dann ist … Aussage.



[B 3.16]

Erzeuge mithilfe des Rechners viel mehr Mein-Aussagen dieser Art.
Achte bei der Belegung für a und b

a) auf eine ausgewogene Wahl von rationalen Zahlen. Verwende Zahlen aus verschiedenen Teilmengen von $\mathbb{Q}$ (natürliche Zahlen, Bruchzahlen, negative und positive rationale Zahlen) und
b) auch darauf, dass gerade bei der zweiten Stufe die Falsch-Aussagen (fünfte Spalte) von großem Interesse sind. Versuche solche zu produzieren!

Folgende Erkenntnis sollte beim Übergang zur dritten Stufe klar zum Ausdruck kommen:

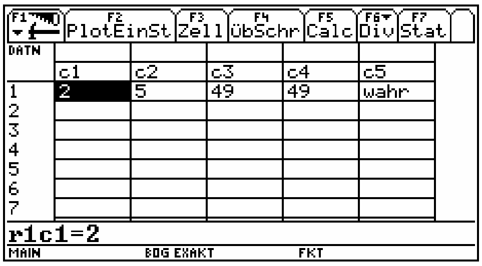
(I) Ganz gleich welche rationale Zahlen man sich für a und b auch ausdenken mag, stets geht die Gleichung $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ in eine wahre Aussage über. Oder anders formuliert:

(II) Jeder Versuch wird misslingen, aus der Gleichung $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ mit a und b als rationale Zahlen eine Falsch-Aussage gestalten zu wollen.

Wir beginnen mit der Formulierung von Mein-Aussageformen (dritte Stufe), indem wir statt der ausgedachten Zahlen für a und b, diese durch eine Variable (später auch durch zwei Variablen) mit unbekanntem Wert ersetzt werden.

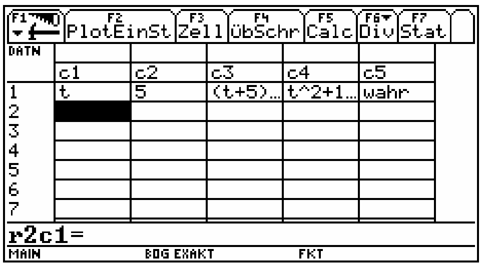
Beispiel 4: Wir ersetzen die Zahl 2 aus der ersten Mein-Aussage durch die Variable t, wobei t eine rationale Zahl darstellt, dessen Wert wir aktuell aber nicht näher beschreiben können.

Wir markieren die erste Zelle der ersten Spalte. Hier steht die Zahl 2.



[B 3.17]

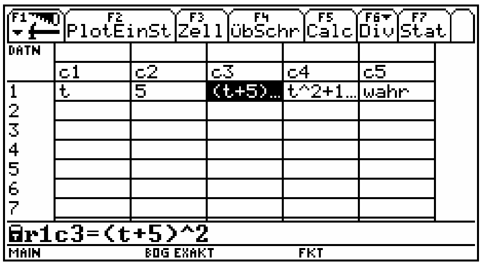
⦿ Drücke: ENTER
T
ENTER.



[B 3.18]

◉ Drücke: (↑)(→)(→)

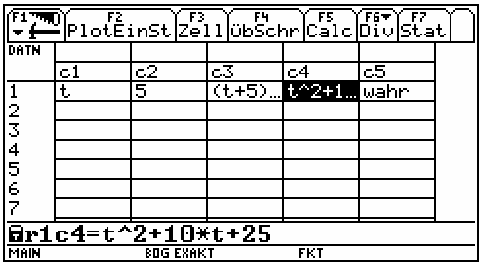
Siehe unten in der Schreibzeile: $(t+5)\,^\wedge 2$.



[B 3.19]

◉ Drücke: (→)

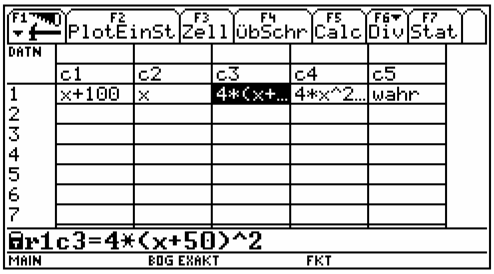
Siehe unten in der Schreibzeile: $t\,^\wedge 2+10*t+25$.



[B 3.20]

Interpretation: Die Gleichung $(t+5)^2 = t^2+10t+25$ ist aus der ersten Binomischen Formel entstanden. Obwohl wir den aktuellen Wert von t nicht kennen, ist diese Gleichung für jede rationale Zahl t eine wahre Aussage.
Weitere Mein-Aussageformen werden auf ähnliche Weise gebildet.

Beispiel 5: Gegeben ist die Gleichung $4\cdot(x+50)^2 = 4x^2+400x+10000$ mit $x\in\mathbb{Q}$. Was weiß man über diese Gleichung?

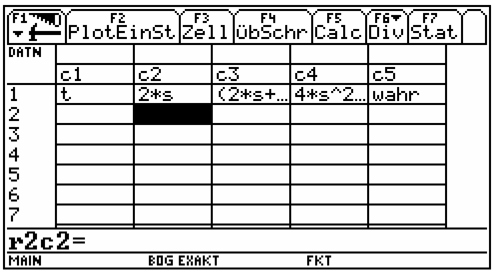


[B 3.21]

Interpretation: Die Gleichung $4\cdot(x+50)^2 = 4x^2+400x+10000$ ist aus der ersten Binomischen Formel entstanden. Obwohl wir den aktuellen Wert von x nicht kennen, ist diese Gleichung für jede rationale Zahl x eine wahre Aussage.

Auch zwei Variablen können zu einer tieferen Einsicht führen.

Beispiel 6: Gegeben ist die Gleichung $(2s+t)^2 = 4s^2+4s\cdot t+t^2$ mit $s\in\mathbb{Q}$ und $t\in\mathbb{Q}$. Was weiß man über diese Gleichung?



[B 3.22]

Interpretation: Die Gleichung $(2s+t)^2 = 4s^2 + 4s \cdot t + t^2$ ist aus der ersten Binomischen Formel entstanden. Obwohl wir die aktuellen Werte von s und t nicht kennen, ist diese Gleichung für jede rationale Zahl s und für jede rationale Zahl t eine wahre Aussage.

Es kann nicht objektiv angegeben werden, wie viele Mein-Aussagen und Mein-Aussageformen gebildet werden müssen, um eine Anwendung der ersten Binomischen Formel beschreiben zu können.

Fazit (Erwartungshaltung): Die erste Binomische Formel $(x+y)^2 = x^2 + 2x \cdot y + y^2$ ist für alle rationalen Zahlen x und y stets eine wahre Aussage. Mit der Formel können weitere Gleichungen gebildet werden, die dann auch stets wahre Aussagen sind. Zum Beispiel gelten daher folgende Gleichungen für alle rationalen Zahlen x, s oder t:

a) $4 \cdot (x+50)^2 = 4x^2 + 400x + 10000$,

b) $(t+5)^2 = t^2 + 10t + 25$,

c) $(2s+t)^2 = 4s^2 + 4s \cdot t + t^2$.

Die wesentliche Leistung des Schülers liegt also im Interpretieren von Rechnerausgaben, deren Folgerungen in weiteren Übungen durch Beweise gesichert werden müssen. Der Rechner ermöglicht eine nahezu fehlerfreie Erstanwendung der zu erlernenden Formeln.

Fortsetzung folgt

Literaturquellen:

[1] „Das Einmaleins des Voyage™ 200“, Frank Schumann, Math-College®, erschienen 2004 im Schumann`s Verlagshaus, Sangerhausen, 2. berichtigte Auflage.

Impressum und Rechte:
Herausgeber: Jens Carl, Wertheim am Main
© Schumann`s Verlagshaus, Am Wartberg 6, 97877 Wertheim am Main
Telefon: 0 93 42 / 85 963 85
Fax: 0 93 42 / 85 963 87
E-Mail: mathe-innovativ@math-college.de
Web: www.schumanns-verlagshaus.de
Redaktion: mathe-innovativ - In Mathe einfach besser:
Jens Carl (verantwortlicher Redakteur),
Satz und Druck: Schumann`s Verlagshaus Wertheim am Main
Anzeigenverwaltung: Jens Carl
Zur Zeit gilt die Anzeigenpreisliste Nr. 1 vom 01.04.2005.
Redaktionsschluss der Ausgabe 02/05: 15.08.2005
Auslieferung der Ausgabe 02/05: 26. 09. 2005
Redaktionsschluss der nächsten Ausgabe 03/05: 15.09.2005
Erscheinungsweise: monatlich, außer Juli und August