2 Mein Aussagen – 3. Teil

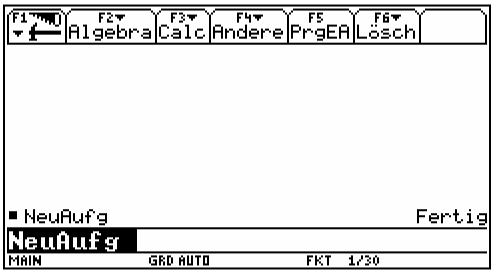
(Fortsetzung des Beitrages von Faru Dr. Ingeborg Löffler aus Ausgabe 02/05)

2.1 Binomische Formeln und Auswendiglernen

Um Anwendungsaufgaben zu den Binomischen Formeln bewältigen zu können, müssen wir die diese aus dem Gedächtnis heraus widergeben können.
Das Geheimnis für schnelles und sicheres Auswendiglernen wichtiger Formeln ist das folgende Prinzip: Informationen werden schrittweise soweit „abgespeckt“, bis am Ende des Prozesses nur noch jener Informationsanteil übrig bleibt, der sich in allen Anwendungsaufgaben widerspiegelt.
Wir wissen ja nun, dass es für die Formeln den textlichen Vorspann gibt, der so lautet: *„Für alle rationalen Zahlen gilt...“* Er ist für das Aufstellen von Mein-Aussagen von unschätzbarem Wert. Dennoch können wir zum Zwecke des Auswendiglernens auf diese Information *vorläufig* verzichten.
Um herauszubekommen, welche Informationen wir uns tatsächlich einprägen müssen, setzen wir unsere Überlegungen mit einfachen Übungen am Rechner fort.

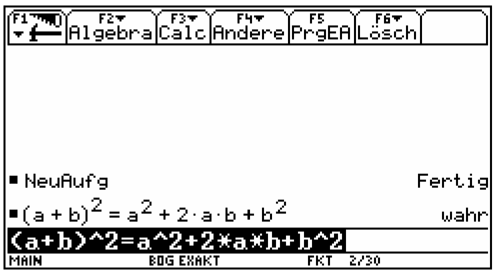
Stelle den Startzustand her und führe anschließend eine HOME-Bereinigung durch.

HOME/



[B 2.1]

Gib, wie im nebenstehenden Bildschirm zu sehen ist, die erste Binomische Formel mit den Symbolen a und b ein.



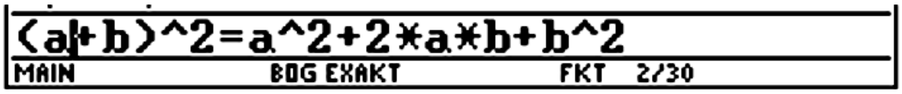
[B 2.2]

Aufgabe: Ersetze die Symbole a und b durch die Zahlen $a = 6$ und $b = 0.7$.
Benutze dabei

- die Richtungstatsen: ◀, ▶
- die Rücktatse: ⟵
- die Tasten des numerischen Tastenfeldes

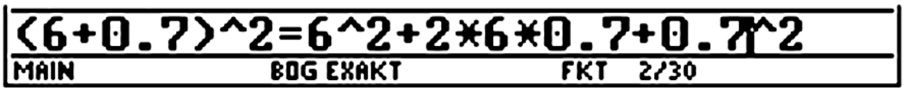
Überprüfe mittels ENTER-Taste den Wahrheitswert der Gleichung $(6+0.7)^2 = 6^2 + 2\cdot 6\cdot 0.7 + 0.7^2$.

Schrittweiser Verlauf des Austauschverfahrens:



[B 2.3]

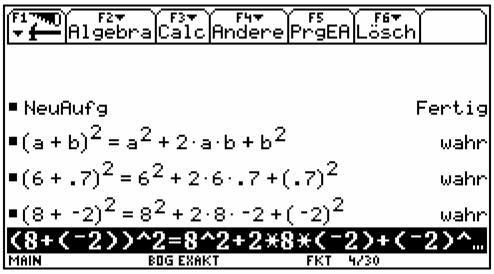
…



[B 2.4]

Wir ändern die Aufgabe ein wenig ab und formulieren: Überprüfe den Wahrheitsgehalt der Gleichung $(8+(-2))^2 = 8^2 + 2\cdot 8\cdot(-2)+(-2)^2$, indem du in der letzten Gleichung die Zahl 6 gegen die Zahl 8 und die Zahl 0.7 gegen die Zahl (-2) ersetzt.

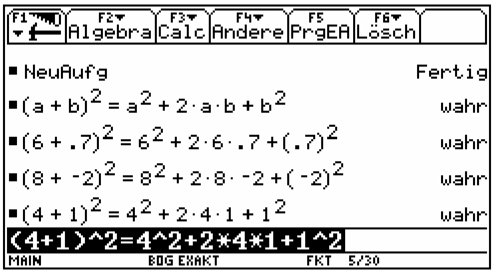
$$\begin{array}{l}
\left(\boxed{6}+\boxed{0.7}\right)^2 = \boxed{6}^2 + 2\cdot\boxed{6}\cdot\boxed{0.7} + \boxed{0.7}^2 \quad \textit{wahr} \\
\quad\downarrow\quad\;\downarrow\qquad\;\;\downarrow\qquad\;\downarrow\quad\downarrow\qquad\;\downarrow \\
\left(\boxed{8}+\boxed{(-2)}\right)^2 = \boxed{8}^2 + 2\cdot\boxed{8}\cdot\boxed{(-2)} + \boxed{(-2)}^2 \quad \textit{wahr}?
\end{array}$$



[B 2.5]

Wir erweitern die Aufgabe und testen nach gleichem Austauschprinzip die Gleichung $(4+1)^2 = 4^2 + 2\cdot 4\cdot 1 + 1^2$.

$$\begin{array}{l}
\left(\boxed{8}+\boxed{(-2)}\right)^2 = \boxed{8}^2 + 2\cdot\boxed{8}\cdot\boxed{(-2)} + \boxed{(-2)}^2 \quad \textit{wahr} \\
\quad\downarrow\quad\;\downarrow\qquad\;\;\downarrow\qquad\;\downarrow\quad\downarrow\qquad\;\downarrow \\
\left(\boxed{4}+\boxed{1}\right)^2 = \boxed{4}^2 + 2\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{1} + \boxed{1}^2 \quad \textit{wahr}?
\end{array}$$



[B 2.6]

Wir können dieses Testverfahren auf neue Gleichungen mittels Ersetztens beliebig oft anwenden. Dabei wächst allmählich die Erkenntnis: Um stets den Wert „wahr“ zu erhalten, muss man auf zwei Dinge achten:

1. Bestimmte Zahlen sind gegen vorliegende Zahlen an wohl definierten Stellen gegeneinander auszutauschen,
2. ebenso sind aber auch vorgegebene Zeichen für Zahlen, Rechenzeichen, Gleichheitszeichen sowie Klammern an wohl definierten Stellen nicht zu ändern und unbedingt beizubehalten.

Der zweite Aspekt interessiert uns jetzt im besonderen Maße. Was ändert sich nicht an der Formel? Wir „specken“ die Informationen der Objektebene ab:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(4+1)^2 = 4^2 + 2\cdot 4\cdot 1 + 1^2$$
$$\left(\boxed{4}+\boxed{1}\right)^2 = \boxed{4}^2 + 2\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{1}+\boxed{1}^2$$
$$\left(\boxed{}+\boxed{}\right)^2 = \boxed{}^2 + 2\cdot\boxed{}\cdot\boxed{}+\boxed{}^2$$
$$((\quad)+(\quad))^2 = (\quad)^2 + 2\cdot(\quad)\cdot(\quad)+(\quad)^2$$

Übrig bleiben die Informationen der strukturellen Ebene. Das Grundgerüst der 1. Binomischen Formel:

$$\boxed{((...)+(...))^2 = (...)^2 + 2\cdot(...)\cdot(...)+(...)^2}$$

Links vom Gleichheitszeichen:

Quadrat aus einem Binom in Form einer Summe.

Rechts vom Gleichheitszeichen:

Dreigliedrige Summe aus zwei Quadraten und einem dreigliedrigen Produkt, wobei ein Faktor die Zahl 2 ist. Vor allen drei Summanden steht ein Pluszeichen.

Das Grundgerüst für die 1. Binomische Formel bildet die Ausgangsvorlage für unser Auswendiglernen. Wir merken uns von oben nach unten:

"Quadrat" = "Summe" 1. Binomische Formel

$$((...)+(...))^2 = (...)^2 + 2\cdot(...)\cdot(...)+(...)^2$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2$$

für alle $x\in\mathbb{Q}$ und für alle $y\in\mathbb{Q}$

Und so merken wir uns die 2. Binomische Formel. Sie hat sehr viele Gemeinsamkeiten mit der ersten Formel. Demzufolge ist es leichter, sich die wenigen Unterschiede zwischen der erster und der zweiten Binomischen Formel gut einzuprägen.

"Quadrat" = "Summe" 2. Binomische Formel

$$((...)-(...))^2 = (...)^2 - 2\cdot(...)\cdot(...)+(...)^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot y + y^2$$

für alle $x\in\mathbb{Q}$ und für alle $y\in\mathbb{Q}$

Links vom Gleichheitszeichen:

Quadrat aus einem Binom in Form einer Differenz.

Rechts vom Gleichheitszeichen:

Dreigliedrige Summe aus zwei Quadraten und einem dreigliedrigen Produkt, wobei ein Faktor die Zahl (-2) ist. Vor den Quadraten steht ein Pluszeichen.

Der Merkstoff für die 3. Binomische Formel:

"Produkt" = "Differenz/Summe"   3. Binomische Formel

$$((...)+(...))\cdot((...)-(...))=(...)^2-(...)^2$$

$$(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$$

für alle $x\in\mathbb{Q}$ und für alle $y\in\mathbb{Q}$

Links vom Gleichheitszeichen:

Produkt aus Summe und Differenz.

Rechts vom Gleichheitszeichen:

Differenz (Summe) aus zwei Quadraten

$Differenz\,|\,Summe$

$$x^2-y^2=x^2+\left(-y^2\right)$$

2.2 Drei typische Anwendungsaufgaben aus der Schule

Unsere Lerntechnik, die unter dem Namen Mein-Aussagen vorgestellt wurde, ist einerseits keine direkte Anwendungsaufgabe, andererseits bildet sie bei entsprechender Ernsthaftigkeit und Fleißbereitschaft eine gute Grundlage für alle Anwendungsaufgaben aus der Schule. Wir stellen drei typische Anwendungsaufgaben für Binomische Formeln vor.

Aufgabe 1

Verwandle den Term $(m-9)\cdot(m+9)$ in eine gleichwertige Summe!

Aufgabe 2

Der Term x^2-8x+6 soll in einen Term so umgeformt werden, sodass dieser ein vollständiges Quadrat enthält.

Aufgabe 3

Löse die Gleichung $s^2-s+\frac{1}{4}=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2$ nach s auf!

Die ersten beiden Aufgaben verlangen anwendungsbereites Wissen, welches vorrangig auf der strukturellen Ebene platziert ist. Dagegen stellt die dritte Aufgabe eher eine Denkaufgabe dar, die mit dem Wissen aus der quantitativen Ebene schnell und elegant gelöst werden kann.

Zu Aufgabe 1)
Vorüberlegung: Der Term $(m-9)\cdot(m+9)$ soll in eine Summe verwandelt werden. Offensichtlich wird die strukturelle Ebene angesprochen. Wir „specken" wieder „ab" (Fachausdruck: abstrahieren).

$\boxed{1.}$ $(m-9)\cdot(m+9)$

$\boxed{2.}$ $((\ )-(\ ))\cdot((\ )+(\ ))$ Faktoren darf man vertauschen.

$\boxed{3.}$ $((\ )+(\ ))\cdot((\ )-(\ ))$

Die letzte abstrakte Darstellung zeigt eine Gemeinsamkeit mit der 3. Binomischen Formel:

$$((\ )+(\ ))\cdot((\ )-(\ ))\rightarrow\text{"Summe"}$$
$$\begin{aligned}(x+y)\cdot(x-y)&=x^2-y^2 \quad .\\ &=x^2+\left(-y^2\right)\end{aligned}$$

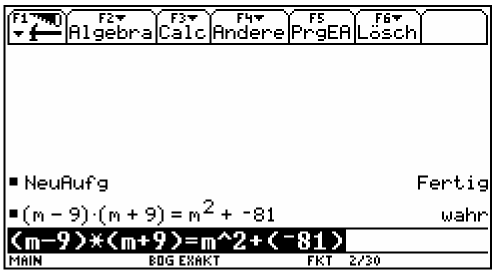
Wir ordnen zu:

$$\left.\begin{aligned}(m-9)\cdot(m+9)\\ (x-y)\cdot(x+y)\end{aligned}\right\} x \mathrel{\hat{=}} m, y \mathrel{\hat{=}} 9$$

Wir formen in eine Summe um:

$$\begin{aligned}(m-9)\cdot(m+9)&=x^2+\left(-y^2\right)\\ &=(\ )^2-(\ )^2\\ &=(m)^2-(9)^2\\ &=m^2-81\\ &=\underline{\underline{m^2+(-81)}}\end{aligned}$$

Wir kontrollieren mit dem Rechner:
Stellt die Gleichung für alle m $\mathbb{Q}$ eine wahre Aussage dar? Wir erhalten die Bestätigung am Rechner.



[B 2.7]

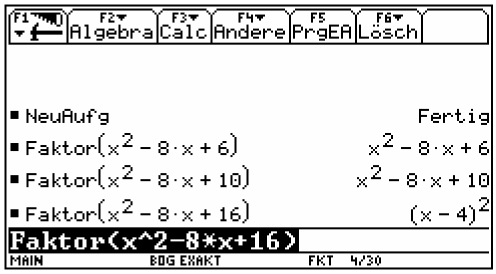
Zu Aufgabe 2)
Vorüberlegung: Was ist ein vollständiges Quadrat? Wir suchen die Antwort in einem Lehrbuch.

Beispiel 7
Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1. Auflage von 1997, Klasse 9, Seite 14
„Terme, die sich in die Form $(a+b)^2$ oder $(a-b)^2$ bringen lassen, heißen vollständige Quadrate.“

Wir probieren mit dem Rechner. Dabei verwenden wir einen nützlichen Befehl, namens Faktor, mit dem man per Knopfdruck Summen in Quadrate bzw. Produkte umformen kann, wenn es überhaupt möglich ist.

Wir testen nacheinander die Terme: x^2-8x+6, $x^2-8x+10$ und $x^2-8x+16$ mit dem Faktor-Befehl aus.

Offensichtlich ist der dritte Term $x^2-8x+16$ zur Umformung in ein vollständiges Quadrat geeignet.



[B 2.8]

Mit dieser Idee vom Rechner versuchen wir die Lösung selbstverständlich ohne Rechner zu finden, um so zu erkennen, welche Zusammenhänge zu den Binomischen Formeln bestehen. Dabei lernen wir wie das „Formelinstrument“ sinnvoll genutzt werden kann.

Vorüberlegungen:

1. $x^2-8x+6=x^2-8x+\text{"}Null\text{"}+6$

   Addiert man zu einem Term die Zahl 0, dann ändert sich nichts an seinem Wert.

2. $x^2-8x+6=x^2-8x\overbrace{+\square^2-\square^2}^{Null}+6$

   Verfahren der aktiven Null: Man addiert eine Zahl (hier ein Quadrat) und subtrahiert diese Zahl gleich wieder.

3. $x^2-8x+6=\underbrace{x^2-8x+\square^2}_{Vollst.Quadrat}-\underbrace{\square^2+6}_{Anhängsel}$

   Die ersten drei Glieder können bei geeignetem Quadrat (Fachausdruck: quadratische Ergänzung) in ein vollständiges Quadrat überführt werden. Die letzten zwei Glieder werden sozusagen als „Anhängsel“ mitgeführt.

Lösung:

$$x^2-8x+6=x^2-8x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+6$$

$$x^2-8x+6=x^2-8x\quad +0 \quad +6$$

$$x^2-8x+6=x^2-8x\overbrace{+\boxed{?}^2-\boxed{?}^2}^{Null}+6$$

$$x^2-8x+6=\underbrace{x^2-8x+\boxed{4}^2}_{Vollst.Quadrat}\ -\ \underbrace{\boxed{4}^2+6}_{Anhängsel}$$

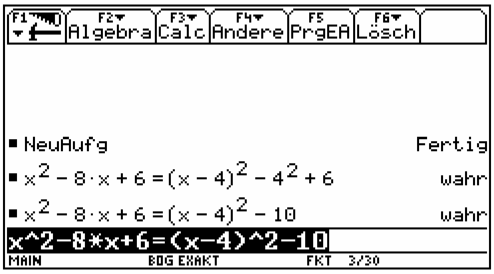
$$=\underline{\underline{(x-4)^2-10}}$$

Lass zwischen den ersten beiden Summanden und dem letzten Summanden genügend Platz! Denke dir in der Lücke den Summanden Null! Überlege, welche Zahl gehört in beide Kästchen!

$$\left.\begin{array}{l} x^2-8x \\ x^2\,\boxed{-8x}\quad+\boxed{}^2 \\ a^2\,\boxed{-2a\cdot b}\quad+b^2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} -8x \;\hat{=}\, -2a\cdot b \\ -2x\cdot 4 \;\hat{=}\, -2a\cdot b \\ 4 \;\hat{=}\, b \end{array}$$

Die quadratische Ergänzung ist die Zahl 4.

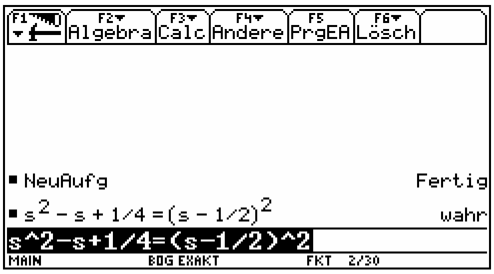
Zum Abschluss dieser Übung überprüfen wir unsere Lösung am Rechner. Die von uns entwickelte Gleichung stellt für alle rationalen Zahlen x eine wahre Aussage dar.



[B 2.9]

Zu Aufgabe 3)

Lösung: Die Gleichung $s^2-s+\frac{1}{4}=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2$ soll nach s umgeformt werden.
Wir wissen, dass die Gleichung aus der zweiten Binomischen Formel folgt und demzufolge für alle rationalen Zahlen s wahr ist. Also muss gelten: $s=s$.



[B 2.10]

Abschließende Bemerkungen zum Thema Binomische Formeln: Wir können erkennen, dass auch die typischen Anwendungsaufgaben trotz ihres höheren Anspruches gegenüber dem Aufstellen von Mein-Aussagen in den verschiedenen Informationsebenen vom Schüler analysiert werden müssen.