1 PRAKTISCHES RECHNEN

1.1 Addition und Subtraktion von Näherungswerten

Wiederholen und Üben

1 a) Runde die Zahlen 542; 9258; 37; 9; 681; 10; 145.12 auf die Zehnerstelle!

b) Nenne alle natürlichen Zahlen x, die beim Runden auf Vielfache von 10 zu 4820 führen! Gib diese Zahlen x folgendermaßen an: $a \leq x < b$!

c) Veranschauliche die Zahlen x aus b) am Zahlenstrahl!

d) Runde auf eine (zwei) Stelle(n) nach dem Dezimalpunkt!
0.587; 28.3; 5.559; 8.799

e) Was bedeutet die Angabe (17 $\pm$ 0.5) kg? Gib die obere und untere Wertschranke an! Formuliere auch in der Schreibweise:
Untere Wertschranke $\leq$ x $\leq$ Obere Wertschranke!

a) $542 \approx 540;\quad 9258$

b)

c)

d)

- auf eine Stelle nach dem Dezimalpunkt	- auf zwei Stellen nach dem Dezimalpunkt
0,587 ≈	0,587 ≈

e)

1 Vor Antritt einer Fahrt überprüft der Fahrer eines LKW, ob mit den zu transportierenden Gütern die Ladefähigkeit von 14 t überschritten wird. Auf den Verpackungen der einzelnen Güter stehen folgende Angaben: 11.9 t; 1.28 t; 0.63 t; 233 kg. Darf er diese vier Güter transportieren?

1. Lösungsweg: [Schriftliches Addieren]

Wir rechnen alle Angaben zuerst in Tonnen um und addieren dann schriftlich.

2 Ergänze die nebenstehende Rechnung und begründe das Setzen der Fragezeichen!

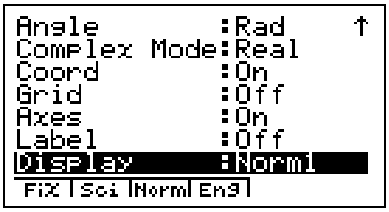
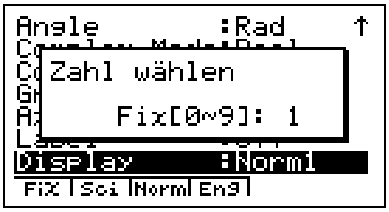
```
11.9??  t
 1.28?  t
 0.63?  t
 0.233  t
Ü 2 1?
  .0??  t
```

Hinweis: Ob die Ziffer 0 nach dem Dezimalpunkt noch sinnvoll ist, bleibt auf Grund des unsicheren Übertrages fraglich.

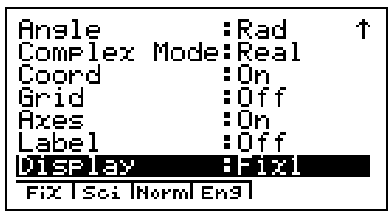
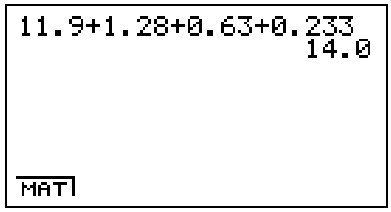
2. Lösungsweg: [Numerisches Addieren und Runden]

Wir berechnen die Summe der vier Näherungswerte mit dem FX 2.0 im RUN-MAT-Menü.

Auf welche Stelle nach dem Dezimalpunkt wir die Summe runden, verraten uns vorläufig die Überlegungen aus dem ersten Lösungsweg. Deshalb stellen wir die Genauigkeit der Ausgabe im SET-UP-Menü auf Fix1, was so viel bedeutet: Alle Ausgaben werden auf eine Stelle nach dem Dezimalpunkt gerundet.

Handlung im RUN-MAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Öffnen des SET-UP-Menüs - Markieren der Displayanzeige	CTRL F3 ▲	 Figur 1.1
- Umstellen auf Fixpunktdarstellung - Einstellen der Anzahl von Dezimalstellen nach dem Dezimalpunkt	F1 1	 Figur 1.2

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

- Bestätigen der Eingabe	EXE	 Figur 1.3
- Rückkehr in das RUN-MAT-Menü - Berechnen der Summe	ESC **11.9** + **1.28** + **0.63** + **0.233** EXE	 Figur 1.4

Wir interpretieren die numerische Lösung 14.0 und formulieren einen vorläufigen Antwortsatz: Nach unserem jetzigen Kenntnisstand kann der Fahrer diese vier Güter mit seinem LKW transportieren.

3. *Lösungsweg: [Wertschrankenmethode]*

Bis jetzt haben wir noch keine Regel, wie wir die Summe aus Näherungswerten runden sollen.

Wir wissen bereits:
- die einzelnen Summanden sind alle Näherungswerte;
- die Näherungswerte sind unterschiedlich genau, zum Beispiel ist der Wert 11,9 t auf Zehntel genau gerundet, dagegen 0,63 t auf Hundertstel genau;
- aus dem ersten Lösungsweg, dass die zweiten und dritten Dezimalstellen nicht bestimmbar sind. Deshalb haben wir auch an entsprechenden Stellen Fragezeichen gesetzt.

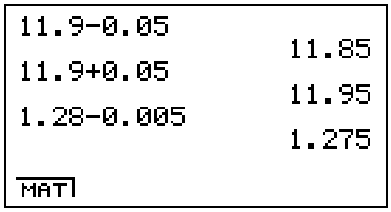
Wir wissen aber nicht, ob die erste Dezimalstelle im Ergebnis noch sinnvoll ist. Diesem Problem werden wir uns jetzt zuwenden und dabei die Wertschrankenmethode erläutern.

Wir kennen nicht die genauen Werte der vier Summanden. *Gehen wir aber davon aus*, dass jede Ziffer der vier Näherungswerte mit größter Sorgfalt gemessen wurde, dann können wir annehmen, dass auch jede Ziffer sinnvoll ist, was nichts anderes bedeutet: Jede Ziffer geht aus einem Rundungsvorgang hervor.

Für die genauen Werte a, b, c und d:

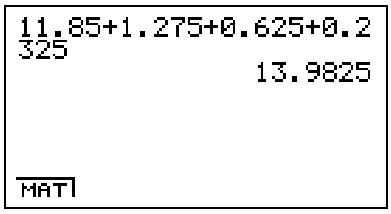
Näherungswert	Toleranz für das Runden	Untere Wertschranke	Obere Wertschranke	Abschätzung
11.9	$\pm$ 0.05	11.85	11.95	$11.85 \leq a \leq 11.95$
1.28	$\pm$ 0.005	1.275	1.285	$1.275 \leq b \leq 1.285$
0.63	$\pm$ 0.005	0.625	0.635	$0.625 \leq c \leq 0.635$
0.233	$\pm$ 0.0005	0.2325	0.2335	$0.2325 \leq d \leq 0.2335$

Für die Berechnungen der *unteren* und *oberen Wertschranken* benutzen wir selbstverständlich den FX 2.0. Siehe Figur 1.5. Dabei verwenden wir im SET-UP-Menü die Einstellung Display: Norm1.



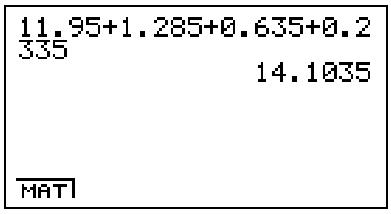
Figur 1.5

Addiert man im RUN-MAT-Menü bei Display: Norm1 alle unteren Wertschranken auf, so erhält man die *untere Summenschranke* 13.9825.



Figur 1.6

Addiert man im RUN-MAT-Menü bei Display: Norm1 alle oberen Wertschranken auf, so erhält man die *obere Summenschranke* 14.1035.



Figur 1.7

Zusammenfassung:

Aus den bisherigen Berechnungen können wir erkennen, dass der genaue Summenwert s unbekannt ist. Dennoch können wir folgende Aussage über s treffen: *Der genaue Summenwert s liegt zwischen der unteren und oberen Summenschranke.*
Kürzer geschrieben: $13.9825 \leq s \leq 14.1035$.
Die einfachen Überlegungen aus Lösungsweg 1 werden durch die letzten Betrachtungen zur Wertschrankenmethode einigermaßen sinnvoll bestätigt. Wir werden für die Addition von Näherungswerten (gilt auch für Subtraktion) folgende Faustregel notieren.

Addition und Subtraktion von Näherungswerten

1. Den Näherungswert bzw. die Näherungswerte mit geringster Genauigkeit heraussuchen. Das sind die Werte, bei denen die letzte Ziffer am weitesten links steht.
2. Die Summe bzw. die Differenz auf diese Stelle runden.

Bemerkung: Der 2. Lösungsweg ist damit ebenfalls bestätigt.

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Zum Üben im Arbeitsheft

3 Familie Konrad möchte neue Sitzmöbel kaufen. Genauer 2 Sessel und eine Couch. Ihnen werden verschiedene Sessel und Couch zu je zwischen 200 DM und 800 DM bzw. zwischen 850 DM und 1895 DM angeboten. Zwischen welchen Beträgen liegt der Gesamtpreis für die neuen Sitzmöbel?

*Lösung: (2*200+850) DM $\leq P \leq$ (2*800+1895) DM*

4 Von einem Dreieck sind dessen Seitenlängen als Messwerte bekannt:
x = 9.0 cm; y = 4.82 cm; z = 14.3 cm.
Bestimme

a) mit der Wertschrankenmethode,
b) mit der letzten Faustregel den Umfang des Dreiecks!

Lösung: a) 28.015, cm $\leq u \leq$ 28.225 cm
b) u=28.1 cm

1.2 Multiplikation und Division von Näherungswerten

Wiederholen und Üben

5 Ein rechteckiger Garten soll in seiner Fläche bestimmt werden. Die Maße sind: Länge: 24.6 m; Breite: 22.3 m.

a) Wende zur Abschätzung der Gartenfläche die Wertschrankenmethode an!
b) Ermittle den Flächeninhalt des Gartens auch durch schriftliche Multiplikation! Setze im Rechenschema bewusst Fragezeichen und begründe dieses Setzen!

Zu 5a)

Näherungswert	Toleranz für das Runden	Untere Wertschranke	Obere Wertschranke	Abschätzung
24.6	±			$\leq a \leq$
22.3	±			$\leq b \leq$

Berechnung der unteren Produktschranke: Produkt der Wertschranken

Ergebnis:

Berechnung der oberen Produktschranke: Produkt der Wertschranken

Ergebnis:

Abschätzung für den Flächeninhalt: $\quad \leq A \leq$

Zu 5b)

Überschlag:

2	4,	6	?	•	2	2,	3	?
		4	9	2	?			
+								
+								
+								

Begründung für das Setzen der Fragezeichen:

Multiplikation und Division von Näherungswerten

Den Näherungswert bzw. die Näherungswerte mit der *geringsten Anzahl von Ziffern* heraussuchen.

Das Produkt bzw. den Quotienten auf diese *Anzahl von Ziffern* runden.

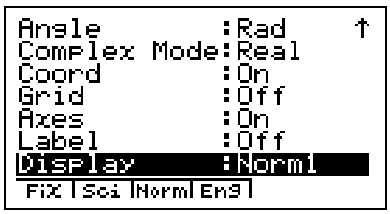
Achtung: Bei Dezimalbrüchen, die mit Null beginnen.

Bei Dezimalbrüchen dieser Art werden die Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer nicht mitgezählt. Beispielsweise werden beim Dezimalbruch 0.00086 die ersten 4 Nullen nicht mitgezählt, sondern nur die Ziffern 8 und 6.

2 Berechne im RUN-MAT-Menü des FX 2.0 folgende Produkte und Quotienten mit sinnvoller Genauigkeit! Dabei sind alle Größenangaben Näherungswerte.

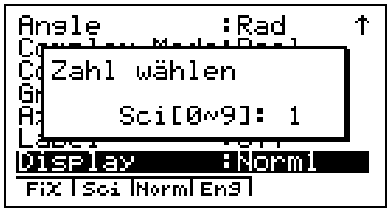
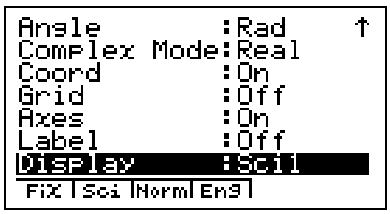
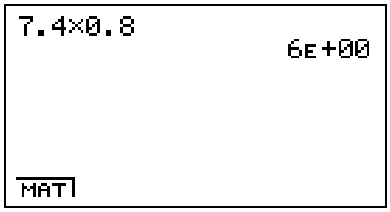
a) 7.4 mm · 0.8 mm b) 25.726 m³ : 8.7 m c) 0.65 dm · 2.140 dm · 0.0072 dm

Zu Aufgabe 2a)

Handlung im RUN-MAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Markieren der Displayanzeige	CTRL F3 ▲	

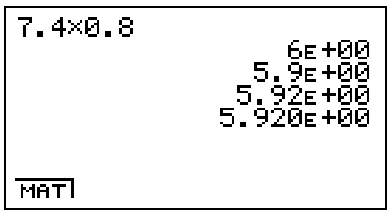
Figur 1.8

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

- Umstellen auf *wissenschaftliche Notation* - Einstellen der Ziffern-Anzahl	F2 1	 Figur 1.9
- Bestätigen der Eingabe	EXE	 Figur 1.10
- Wechseln in das Hauptmenü - Berechnen des Produkts	ESC **7.4** x **0.8** EXE	 Figur 1.11

Was bedeutet die Ausgabe 6E+00?

Um festzustellen, was der FX 2.0 mit der Darstellung 6E+00 anzeigt, betrachten wir zunächst folgendes Testbeispiel (siehe Figur 1.12). Wie das erste Ergebnis zu Stande kommt, wissen wir bereits: Einstellung Display: Sci1 (CTRL F3 ▲ F2 1) im SET-UP-Menü und anschließend zwei Mal die EXE Taste drücken. Um das zweite Ergebnis zu erhalten, wird die Einstellung Display: Sci2 vorgenommen und dann wiederum zwei Mal die EXE Taste gedrückt. Beim dritten Ergebnis ist es die Einstellung Display: Sci3 und beim vierten Ergebnis die Einstellung Display: Sci4.



Figur 1.12

Wir erkennen: Bei jeder Änderung des Sci-Wertes ändert sich auch die Anzahl der Dezimalzahlstellen im Produkt.

Der Sci-Wert in der Einstellung Display aus dem SET-UP-Menü gibt an, wie viele gerundete Ziffern der Dezimalbruch im Ergebnis haben darf. Dem Dezimalbruch folgt der Buchstabe E.

Doch wofür stehen das Plus und die letzten beiden Ziffern?

Die Antwort suchen wir wieder durch systematisches Experimentieren am FX 2.0.

Voreinstellung: RUN-MAT/SET-UP/ Display: Sci1

Handlung im RUN-MAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Bildschirm löschen - Eingabe der Zahl 20000 - Auswerten - ...	AC/ON **20000** EXE **2000** EXE **200** EXE	20000 2E+04 2000 2E+03 200 2E+02 MAT Figur 1.13
- ...	AC/ON **20** EXE **2** EXE **0.2** EXE	20 2E+01 2 2E+00 0.2 2E-01 MAT Figur 1.14
- ...	AC/ON **0.02** EXE **0.002** EXE **0.0002** EXE	0.02 2E-02 0.002 2E-03 0.0002 2E-04 MAT Figur 1.15

Wir verallgemeinern:

Wissenschaftliche Notation

Der Sci-Wert in der Einstellung Display aus dem SET-UP-Menü gibt an, wie viele gerundete Ziffern der Dezimalbruch im Ergebnis haben darf.

Die Zeichen nach dem tiefgestellten E sind entweder ein Pluszeichen, gefolgt von zwei Ziffern oder ein Minuszeichen, gefolgt von zwei Ziffern.

Bei einem *Pluszeichen* ist der Dezimalpunkt um so viel Stellen *nach rechts* zu versetzen, wie die beiden letzten Ziffern es anzeigen. Freie Plätze, die möglicherweise dadurch entstehen können, sind mit Nullen aufzufüllen.

Bei einem *Minuszeichen* muss der Dezimalpunkt *nach links* versetzt werden. Dazu sind so viel Nullen vor das angezeigte Ergebnis zu schreiben, wie durch die letzten beiden Ziffern angegeben wird. Der Dezimalpunkt erscheint natürlich nach der ersten Null.

Man kann den FX 2.0 auch für die umgekehrte Aufgabenstellung nutzen.

Gegeben sei eine Zahl in wissenschaftlicher Notation, gesucht ist dann die entsprechende Dezimalzahl.

3 Wandle mit dem FX 2.0 in eine Dezimalzahl um!

a) $85.1234 \cdot 10^{3}$ b) $163100.26 \cdot 10^{-5}$ c) $8.14 \cdot 10^{10}$

Voreinstellung: RUN-MAT/SET-UP/ Display: Norm2

Handlung im RUN-MAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Bildschirm löschen - Eingabe der Zahl $85.1234 \cdot 10^{3}$ - Auswerten	AC/ON **85.1234** EXP + **03** EXE	85.1234E+03 85123.4 MAT Figur 1.16
- Bildschirm löschen - Eingabe der Zahl $16310{,}26 \cdot 10^{-5}$ - Auswerten	AC/ON **16310.26** EXP - **5** EXE	16310.26E-5 0.1631026 MAT Figur 1.17

6 Untersuche das Beispiel 3c) $8.14 \cdot 10^{10}$ selbst! Was fällt Dir auf?

Voreinstellung: RUN-MAT ...

Handlung im RUN-MAT-Menü	*Tastenfolge*	*Anzeige*

7 **Bearbeite die Aufgaben 2 b und c von Seite 6 im RUN-MAT-Menü des FX 2.0!**

b) 25.726 m : 8.7 m

Geringste Anzahl von Ziffern: SET-UP/Display: Sci

Ergebnis in wissenschaftlicher Notation:

Ergebnis als Dezimalzahl mit Einheit:

Lösung: 3.0 m^2

c) 0.65 dm · 2.140 dm · 0.0072 dm

Geringste Anzahl von Ziffern: SET-UP/Display: Sci

Ergebnis in wissenschaftlicher Notation:

Ergebnis als Dezimalzahl mit Einheit:

Lösung: 0.010 dm^3

Weiterführende Aufgabe zum Üben und Vertiefen

8 **„Genauigkeit hat seine Grenzen“**

Bei den olympischen Schwimmwettkämpfen 1972 in München wurden die Zeiten der Schwimmer auf tausendstel Sekunden genau gemessen. Später ist man zu dem Schluss gekommen, dass „so viel Genauigkeit“ unsinnig ist und ist von der Zeitmessung auf tausendstel Sekunden wieder abgekommen. *Warum?*

Über 400 Meter Lagen gewann 1972 der Schwede Gunnar Larson die olympische Goldmedaille bei einer Zeit von 4:31.981 Minuten. Ihm dicht auf der Spur war der Amerikaner Alexander Mc Kee mit einer Zeit von 4:31.983 Minuten. Wie groß war der Längenvorsprung des schwedischen Olympiateilnehmers? Gehe dabei von einer für beide Schwimmer gemeinsamen Durchschnittsgeschwindigkeit (vereinfachende Annahme) von 1.471 m/s aus! Interpretiere und diskutiere das Ergebnis bezüglich realer Wettkampfverhältnisse und technischer Möglichkeiten!

Berechnung des zeitlichen Vorsprungs:

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Berechnung des Längenvorsprungs:

Durchschnittsgeschwindigkeit mal Gesamtzeit ergibt den Gesamtweg.

Interpretation des numerischen Ergebnisses:

Diskussion:

PS: **Die Bahnen beider Schwimmer wurden nachträglich in ihren Längen ausgemessen. Es ergab sich, dass die Bahn des Amerikaner Mc Kee fast 2 mm länger war, als die des Schwedens Larson.**

2 Terme

2.1 Terme erstellen

Einleitende Situation

Aus dem Wetterbericht eines englischen Fernsehsenders erfuhr Mark, dass vorgestern in London der heißeste Tag dieses Jahres war. Man hatte 86 Grad gemessen. Mark fragte gleich am nächsten Tag seinen Geografielehrer mit äußerster Verwunderung, ob diese Information überhaupt zutreffen kann, denn aus dem Physikunterricht weiß er, dass Wasser bei 100 Grad Celsius siedet. Sein Lehrer erzählte ihm, dass die 86 Grad nicht in der Einheit Celsius gemessen wurden, denn in Großbritannien und in den USA gibt man Temperaturen in Fahrenheit an. Sein Lehrer sprach weiter: „Wenn Du wissen möchtest, wie viel Grad Celsius die 86 Grad Fahrenheit bedeuten, dann musst Du von der Fahrenheit-Angabe die Zahl 32 subtrahieren und die Differenz mit dem Bruch 5/9 multiplizieren, dann erhältst Du die entsprechende Maßzahl in Grad Celsius."

Wie heiß war es nun in London? Gib die entsprechende Temperatur in Grad Celsius an!

1 Bearbeite die nachfolgenden Einzelaufträge!

RUN-MAT-Menü:

a) Arbeite im RUN-MAT-Menü die nebenstehende Tastenfolge ab!

b) Beschreibe den Rechengang in Form eines Rechenablaufplanes. Ergänze!

c) Welche Bedeutung hat hier die Variable Ans?

[AC/ON] [8] [6] [-] [3] [2] [EXE]

[x] [5] [/] [9] [EXE]

86 —(-32)→ Ans ⟶ ____

Die Variable Ans bedeutet

ALGEBRA-Menü:

d) Arbeite im ALGEBRA-Menü die gleiche Tastenfolge ab wie oben und gib die jeweiligen Bildschirmanzeigen an! Du siehst, wie schrittweise auf dem Bildschirm ein vollständiger *Term* entsteht.

[AC/ON] [8] [6] [-] [3] [2] [EXE]

Anzeige:

[x] [5] [/] [9] [EXE]

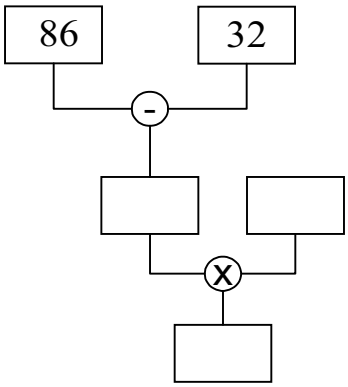
Anzeige:

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Setzt man durch Eintasten Rechenablaufpläne im ALGEBRA-Menü um, so entstehen in der Ausgabe Terme.

Termaufbau am Rechenbaum:

d) Wir beschreiben den Rechenweg unabhängig vom Rechner in Form eines Rechenbaumes und machen uns dabei von oben nach unten klar, welche Operationen der Reihe nach ausgeführt werden. Ergänze den Rechenbaum!



Über Terme wissen wir bisher:

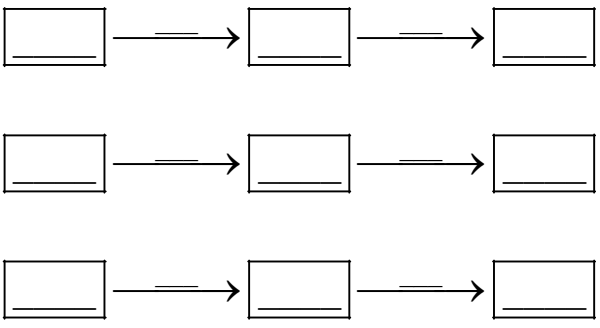
Rechenwege können durch Terme beschrieben werden. Terme bestehen aus Ziffern, runden Klammern und Rechenzeichen.

Weiterführende Aufgabe zum Üben

2 Berechne die Grad Celsius Temperaturen von 100 (0, 12.8) Grad Fahrenheit! Arbeite dazu im RUN-MAT - und im ALGEBRA-Menü!

Termaufbau im RUN-MAT-Menü:

Ablaufpläne



Antwortsätze:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Termaufbau im ALGEBRA-Menü:

Eingabe: AC/ON	*Anzeige:*
Eingabe: AC/ON	*Anzeige:*
Eingabe: AC/ON	*Anzeige:*

2.2 Termwerte

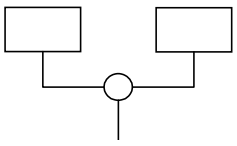
Einleitende Situation

In der Fahrschule lernen die Kursteilnehmer zur Überschlagsberechnung des Bremsweges eine „Faustregel“ kennen, die besagt:

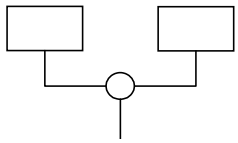
I. Dividiere die Maßzahl der Geschwindigkeitsangabe in Kilometer pro Stunde durch 10.

II. Quadriere das Ergebnis, Du erhältst die Maßzahl des Bremswegs in Meter.

⌛ **3** Stelle die Faustregel durch die Wahl zweier Zahlenbeispiele dar! Gehe dabei so vor: Erarbeite Dir zu dieser Faustregel mit dem FX 2.0 eine Tastenabfolge für das RUN-MAT-Menü, einen entsprechenden algebraischen Term im ALGEBRA-Menü und einen passenden Rechenbaum!

Erstes Beispiel: 85 km/h		
Tastenfolge	*Termanzeige*	*Rechenbaum*
AC/ON 8 5		

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Zweites Beispiel:		
Tastenfolge	*Termanzeige*	*Rechenbaum*
AC/ON		

Weiterführende Aufgabe zur Einführung und Festigung

1 Berechne im ALGEBRA-Menü den Bremsweg in Meter nach der besagten „Faustregel“ für 55 (92, 110) km/h mit Hilfe einer *Variablen* als freier Platzhalter für die gegebenen Maßzahlen der Geschwindigkeit in km/h! Benutze hierzu die Befehle substitute und approx aus dem TRNS-Untermenü!

Wir führen eine Variable ein.
Für die Maßzahlen der Geschwindigkeit in km/h benutzen wir den Großbuchstaben G.
Dann heißt der Term mit der Variablen G zur Bestimmung der Maßzahl für den Bremsweg in Metern: $\left(\frac{G}{10}\right)^2$.

4 Arbeite nun die nachfolgenden Anweisungen mit dem FX 2.0 ab und gewöhne Dich dabei an die verschiedenen Sprechweisen (kursive Schrift).

Wir erzeugen im ALGEBRA-Menü den variablen Term: $\left(\frac{G}{10}\right)^2$.

Um Buchstaben zu schreiben, benutzen wir die Drittbelegung (rote Symbolik) der Tasten. Beispielsweise gilt für den Buchstaben A die Anweisung: Drücke nacheinander die Tasten [ALPHA] [X,0,T] . Und für den Buchstaben G gilt dann: [ALPHA] [ab/c] . Mach Dich auch mit den anderen Buchstaben und den dazugehörigen Tastenbelegungen am Rechner vertraut. Wir werden in Tastenfolgen zur Vereinfachung nur den jeweiligen Buchstaben aufführen.

Tastenfolge:	[AC/ON] [(] G [/] [1] [0] [)] [^] [2] [EXE]
Eingabezeile:	(G/10)^2
Ausgabezeile:	$\left(\frac{G}{10}\right)^2$

Wir bestimmen die exakte Maßzahl für den Bremsweg bei einer Geschwindigkeit von 55 km/h. Dazu rufen wir den substitute-Befehl aus dem TRNS-Menü (F1 Taste) auf.

Der substitute-Befehl erwartet zwei Angaben:

Erste Angabe ist der bereits erzeugte Term $\left(\frac{G}{10}\right)^2$, den wir über die F3 Taste für R-ANS ansprechen (bedeutet: Zeichen der letzten Ausgabe in die Eingabezeile kopieren).

Zweite Angabe ist die Notation G=55, die die Bedingung für die Wertersetzung (*Substitution*) angibt. Das Gleichheitszeichen finden wir in der Zweitbelegung (ocker) über dem Dezimalpunkt. Die Anweisung für das Gleichheitszeichen ist dann:
Drücke nacheinander die Tasten [SHIFT] [.] . Auch hier werden wir in Tastenfolgen nur das Gleichheitszeichen selbst schreiben.
Beide Angaben, also Term und Notation für Wertersetzung, werden durch ein Komma getrennt. Der Befehl wird mit einer runden Klammer abgeschlossen.

Wir führen den belegten Befehl mit der [EXE] *-Taste aus.*

Tastenfolge:	[AC/ON] [F1] [8] [F6] [F3] [F6] [,] G = 55 [)] [EXE]
Eingabezeile:	substitute((G/10)^2, G=55)
Ausgabezeile:	$\left(\frac{55}{10}\right)^2$

Wir interpretieren die letzte Ausgabe. Der exakte Zahlenwert für den gesuchten Bremsweg beträgt $\left(\frac{55}{10}\right)^2$. Die hinzuzufügende Einheit des Bremsweges ist Meter.

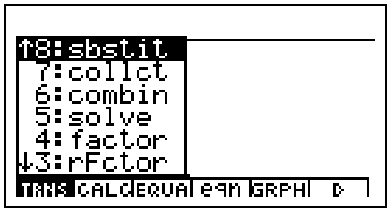
substitute-Befehl für exakte Termwerte

Mit Hilfe des substitute-Befehls aus dem ALGEBRA/TRNS-Menü kann man Terme mit Variablen über eine Wertzuweisung in exakte Zahlenwerte umwandeln.

Syntax: substitute(❶, ❷) $\xrightarrow{\text{EXE}}$ exakter Zahlenwert (exakter Termwert)

❶ ... Term mit Variable
❷ ... Notation für Wertzuweisung: Variable = Zahl

Dokumentationsbeispiel für das ALGEBRA-Menü



Figur 2.1

substitute-Befehl aus dem ALGEBRA/TRNS-Menü, Position 8

Figur 2.2

❶: 4/A | ❷: A=9 | [EXE] liefert exakten Zahlenwert: 4/9

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Wir bestimmen zum exakten Wert den zugehörigen Näherungswert (gerundete Dezimalzahl). Dazu überlegen wir uns *als erstes*, wie genau der zu erwartende Näherungswert überhaupt sein kann. Wir haben als Näherungswert die Zahl 55 eingetragen. Diese Zahl hat zwei Ziffern. Deshalb werden wir entsprechende Einstellungen im SET-UP-Menü vornehmen, bevor wir die Näherung berechnen.

Tastenfolge:	[CTRL] [F3] [F2] [2] [EXE]
Einstellungszeile:	Display : Sci2
Tastenfolge:	[EXE]

Sci (Scientific) ist die Abkürzung für das *wissenschaftliche Zahlenformat* (Dezimalschreibweise mit Zehnerpotenzen). Es schließt sich unmittelbar die Zahl 2 an, die angibt, wie viele Ziffern unser Ergebnis haben soll.
Als zweites bedienen wir uns des approx-Befehls (Approximation bedeutet: Annäherung). Wir finden ihn im TRNS-Untermenü in der Position B. Dieser Befehl erwartet lediglich eine Zahl und liefert eine Dezimalzahl mit der im SET-UP-Menü eingestellten Genauigkeit und Zahldarstellung. Klammern für die Belegung des Befehls sind hierbei nicht notwendig. Da wir zuvor im SET-UP-Menü auf wissenschaftliches Zahlenformat mit 2 Ziffern umgestellt haben, erhalten wir nach Betätigen der [EXE] Taste eine Dezimalzahl mit zwei Ziffern, multipliziert mit einer entsprechenden Zehnerpotenz.

Tastenfolge:	[AC/ON] [F1] [log] (*) [F6] [F3] [F6] [EXE]
Eingabezeile:	approx (55/10)^2
Ausgabezeile:	3.0E+01

(*) „Schnelltaste“ zur Befehlsauswahl – die Drittbelegung der [log] Taste wird nicht benötigt.

Wir interpretieren die letzte Ausgabe.
Die Angabe 3.0E+01 beschreibt eine Zahl mit zwei Ziffern in wissenschaftlicher Notation. 3.0E+01 bedeutet: $3.0 \cdot 10^1 = 3.0 \cdot 10 = 30$.
Antwortsatz: Der Bremsweg beträgt 30 Meter.

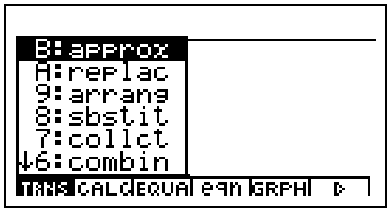
approx-Befehl

Zur Darstellung von Näherungswerten mit voreingestellter Genauigkeit verwenden wir den approx-Befehl aus dem ALGEBRA/TRNS-Menü. Mit seiner Hilfe kann man exakte Zahlen in Dezimalzahlen umwandeln. Diese Umwandlung nennt man Approximation (Annäherung) einer Zahl.

Syntax: approx ❶ $\xrightarrow{\text{EXE}}$ Dezimalzahl ❶ ... exakte Zahl

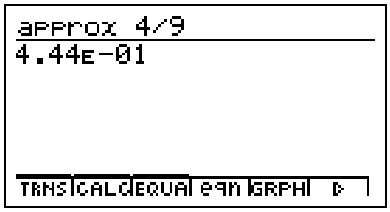
Genauigkeitseinstellung im ALGEBRA-Menü: [CTRL] [F3] [F2] [Ziffer von 0 bis 9] [EXE] [ESC] (wissenschaftliche Notation).

Dokumentationsbeispiel: ALGEBRA/SET-UP/Display: Sci3



Figur 2.3

Befehl approx wird mit [log] Schnell-Taste ausgewählt.



Figur 2.4

❶: 4/9 | [EXE] liefert gerundete Dezimalzahl: 4.44E-01 = 0.444.

Wir erweitern den Begriff Term:

Terme können auch Variablen (Parameter) enthalten.

Zum Üben im Arbeitsheft

⌛ **5** Bestimme den exakten und angenäherten Bremsweg für eine Geschwindigkeit von 92 (110) km/h. Beginne mit einer Gliederung für Deinen Handlungsablauf. Orientiere Dich am Musterbeispiel 📄 1.

2.3 Term als Zeichenreihe

Einleitende Situation

⌛ **6** Gib in das ALGEBRA-Menü die unten stehenden Zeichenreihen ein. Klassifiziere die Ausgaben im Vergleich zu den Eingaben nach folgenden Kriterien!

Klasse 1: Die Ausgabe entspricht der Eingabe.

Klasse 2: Die Ausgabe entspricht der Eingabe und am rechten Rand erscheint zusätzlich eine invertierte Nummer.

Klasse 3: In der Ausgabe erscheint der Hinweis: „Syntaxfehler. Drücken Sie [ESC] “.

Übertrage hierzu den nachfolgenden Tabellenkopf in Dein Arbeitsheft und schreibe in die Spalten die passende Nummer der jeweiligen Zeichenreihe! Beachte die unten aufgeführten Hinweise zum richtigen Umgang mit dem FX 2.0!

Klasse 1	Klasse 2	Klasse 3
(1)	(4)	

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

(1) 6^8 (*s. Hinw.* 1)

(2) $\frac{4}{116}$ (*s. Hinw.* 2)

(3) $-\frac{5}{3}+4$

(4) $U-U=2K$

(5) $4 \le 4$ (*s. Hinw.* 3)

(6) $x+2-$

(7) $-(-19)$

(8) $|-x|$ (*s. Hinw.* 4)

(9) $x^2 \cdot y^2$

(10) $5+\sqrt{c}$ (*s. Hinw.* 5)

(11) $2+\frac{6}{S}$

(12) $5.-6$

(13) $.6$

(14) $\frac{2}{5-A}$ (*s.Hinw.* 6)

(15) $\frac{5+B}{8-C}$

(16) $-1+2\cdot$

(17) $(((2+3)\cdot 10)\cdot 14)$

(18) $(H+J))$

(19) $((5-6x^6))$

(20) $((0))$

(21) $5<1..0$

(22) $5=3$

(23) $\{(5+8)\cdot 6\}\cdot 2$

(24) $ABCDE$

(25) $A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E$

(26) $1\frac{2}{3}$

(27) $1+\frac{2}{3}$

(28) $1\cdot\frac{2}{3}$

(29) $4/60/$

(30) $5+x \le x+5$

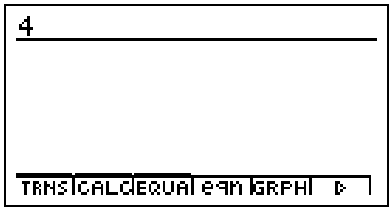
Hinweis 1: Wie gibt man eine Potenz ein, beispielsweise 5^2?

Tastenfolge:	AC/ON **5** ^ **2** EXE
Eingabezeile:	5^2
Ausgabezeile:	5^2

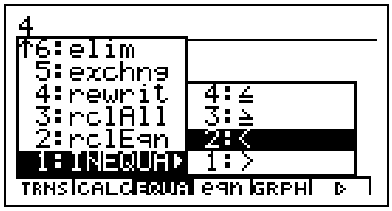
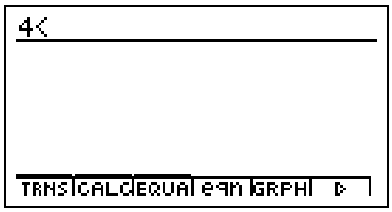
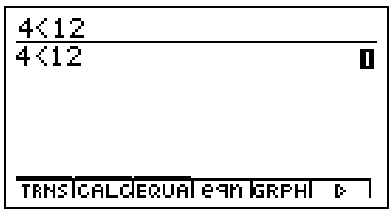
Hinweis 2: Wie gibt man einen Bruch ein, beispielsweise $\frac{4}{3}$?

Tastenfolge:	AC/ON **4** / **3** EXE
Eingabezeile:	4/3
Ausgabezeile:	$\frac{4}{3}$

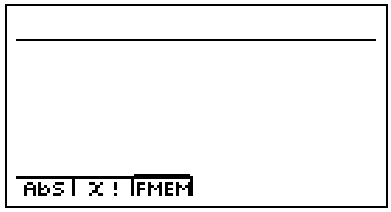
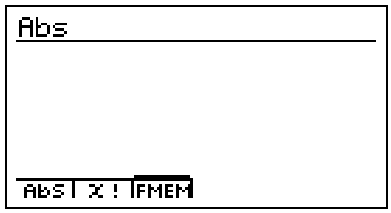
Hinweis 3: Wie gibt man eine Ungleichung ein, beispielsweise 4<12?

Handlung im ALGEBRA-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Löschen der Eingabezeile - Linken Term eingeben	AC/ON 4	

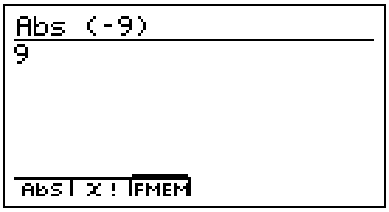
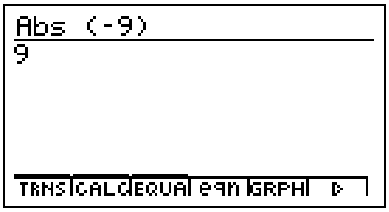
Figur 2.5

- Ungleichheits-zeichen im EQUA/INEQUA-Menü markieren	F3 ▶ ▲	 Figur 2.6
- Passendes Ungleichheits-zeichen auswählen	EXE	 Figur 2.7
- Rechten Term eingeben - Eingabe bestätigen	1 2 EXE	 Figur 2.8

Hinweis 4: Wie gibt man eine Betragszahl ein, beispielsweise |-9|?

Handlung im ALGEBRA-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Löschen der Eingabezeile - Untermenü OPTN öffnen	AC/ON OPTN	 Figur 2.9
- Betragsbefehl markieren und auswählen	F1	 Figur 2.10

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

- Ziffer in runde Klammern setzen - Eingabe bestätigen	[(] [(-)] **9** [)] [EXE]	 Figur 2.11
- In das ALGEBRA-Hauptmenü zurückkehren	[ESC]	 Figur 2.12

Hinweis 5: Wie gibt man eine Quadratwurzel ein, beispielsweise $\sqrt{A}$?

Tastenfolge:	[AC/ON] [SHIFT] [x²] **A** [EXE]
Eingabezeile:	$\sqrt{A}$
Ausgabezeile:	$\sqrt{A}$

Hinweis 6: Wie gibt man einen „komplizierten“ Bruch ein, beispielsweise $\frac{2}{3+5}$?

Tastenfolge:	[AC/ON] **2** [/] [(] **3** [+] **5** [)] [EXE]
Eingabezeile:	$2/(3+5)$
Ausgabezeile:	$\frac{2}{3+5}$

Die Klasseneinteilung der Zeichenreihen erlaubt den Begriff Term näher zu spezifizieren und ihn von beliebigen Zeichenreihen abzugrenzen. So können *wir für uns festlegen*, dass nur jene Zeichenreihen als Terme bezeichnet werden, die man der Klasse 1 zuordnen kann. Ihre gemeinsamen Eigenschaften können wie folgt zusammengefasst werden:

Terme als Zeichenreihen

Terme können aus Ziffern, Dezimalpunkten, Bruchstrichen, Rechenzeichen wie Plus, Minus, Mal, Geteilt-durch, Wurzelzeichen, Potenzeichen und noch einigen anderen Operationszeichen (die Du später noch kennen lernst) bestehen. In Termen dürfen auch runde Klammern (gleich viele öffnende und schließende) und Buchstaben für Variablen oder Einheiten vorkommen.

Relationszeichen, wie zum Beispiel das Gleichheitszeichen oder Ungleichheitszeichen dürfen in Zeichenreihen für Terme nicht auftreten. Gleichungen und Ungleichungen stellen also keine Terme dar.

Achtung: Die Zeichenreihen müssen sinnvolle Kombinationen aus erlaubten Zeichen darstellen, sonst liegen Syntaxfehler vor.

Die Terme können an dieser Stelle unterteilt werden in so genannte *bestimmte* oder *unbestimmte Terme*.

Bestimmte und unbestimmte Terme

Terme in der Art und Weise wie wir sie bisher beispielhaft kennen gelernt haben, unterteilen wir in bestimmte und unbestimmte Terme. Terme, die eine konkrete Zahl beschreiben, nennt man bestimmte Terme. Terme, die nicht eine konkrete Zahl beschreiben, nennt man unbestimmte Terme.

Bestimmter Term und substitute-Befehl

Geht ein unbestimmter Term mittels substitute-Befehl in einen bestimmten Term über, so beschreibt der bestimmte Term den Wert des unbestimmten Terms an der Stelle aller wertbelegten Variablen.

Beispiele:

Das Gleichheitszeichen wird im Folgenden als Wertzuweisungszeichen verwendet.

(1) Der Term 3 beschreibt die Zahl 3, also ein bestimmter Term.

(2) Der Term $-\left(-\frac{25}{5}\right)$ beschreibt die Zahl 5, also ein bestimmter Term.

(3) Der Term x+10 beschreibt an der Stelle x=5 die Zahl 15, also ein bestimmter Term.

(4) Der Term $\frac{a+b}{c+d}$ beschreibt an der Stelle a=4, b=3, c=-5,68 und d=0 die Zahl $-\frac{175}{142}$, also ein bestimmter Term (substitute($\frac{a+b}{c+d}$, a=4, b=3, c=-5.68, d=0) $\rightarrow -\frac{175}{142}$).

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

(5) Der Term $\frac{a+b}{c+d}$ beschreibt an der Stelle a=4, b=3, c=-5,68 noch keine konkrete Zahl, da der Wert von d unbekannt ist, also ein unbestimmter Term (substitute($\frac{a+b}{c+d}$, a=4, b=3, c=-5.68) →???).

(6) Der Term x^2 beschreibt keine konkrete Zahl, da der Wert von x unbekannt ist, also ein unbestimmter Term.

2.4 Term mit Parametern und numerische Listen

Einleitende Situation

2 Viele Zusammenhänge aus den verschiedensten Gebieten des Lebens lassen sich mit Hilfe von Termen sehr allgemein beschreiben. Terme können für die Menschen wichtige Informationen in oft wenigen Zeichen tragen. Eine Beschreibung durch Terme hat den besonderen Vorteil einer leichten Auswertbarkeit der Sachverhalte mittels Taschenrechner oder Computer.

Wir wollen an den folgenden drei Beispielen zeigen, wie man gegebene Sachverhalte sinnvoll verallgemeinern kann. Dazu ist das Entdecken von Gesetzen notwendig, die sich durch Einführen von Termen computerfreundlich beschreiben lassen. Im Speziellen wird dabei demonstriert, dass sich Terme für das Ableiten neuer Aussagen besonders gut eignen.

Unsere Sachverhalte:

a) „Patrick ist 14 Jahre alt. Seine Schwester Emma ist sechs."
b) „Ein Rechteck hat den Flächeninhalt von 24 cm^2."
c) „Ein Auto hat auf 100 km Autobahn einen durchschnittlichen Benzinverbrauch von 5.6 Litern."

Allgemeines Vorgehen:

Im *ersten Schritt* entwickeln wir für die einzelnen Sachverhalte aus den gegeben Daten, unseren Erfahrungen und unseren Gesetzeskenntnissen *Aussagen in Form von Wertetabellen*, die durch Messungen prinzipiell in der Wirklichkeit bestätigt oder widerlegt werden können.

Im *zweiten Schritt* verallgemeinern wir die Tabellendaten auf Grund wiederkehrender Operationen durch Terme, indem wir die bestimmten Terme *auflisten* und anschließend so genannte *Parameter* (Parameter sind Zeichen, die ein Benutzer durch andere Zeichen ersetzen kann) einführen. Wenn die Parameter freie Platzhalter darstellen, dann entstehen unbestimmte Terme.

Im *dritten Schritt* nutzen wir die unbestimmten Terme für Prognosen (Voraussagen), indem wir Termwerte bestimmen und diese dann, falls notwendig, auch durch Dezimalzahlen approximieren (anzunähern), um sie anschaulicher zu präsentieren.

Zu 1a)

„Patrick ist 14 Jahre alt. Seine Schwester Emma ist sechs."

1. Schritt Wertetabelle: „Fester Altersunterschied"

Alter von Patric	14	15	16	17	25	52
Alter von Emma	6	7	8	9	17	44

Beispielaussage: Wenn Patrick 25 Jahre alt ist, dann ist seine Schwester Emma 17 Jahre alt.

2. Schritt Listendefinitionen und Term mit Parameter:

Liste 1:

Alter von Patric	14	15	16	17	25	52

Liste 2:

Alter von Emma	14-8	15-8	16-8	17-8	25-8	52-8

2a) Liste 1 enthält nur bestimmte Terme als Elemente.

Listendefinition: Liste 1 – 8 → Liste 2 (wiederkehrender Operator: „... *minus 8*", angewendet *auf alle* Elemente der Liste 1)

2b) Einführung eines Parameters: P... Alter von Patrick (siehe 1. Liste).

2c) Unbestimmter Term: P-8 ergibt Alter von Emma (siehe 2. Liste).

3. Schritt: Prognose mittels Termwerte

ALGEBRA-Menü: substitute(P-8, P=30) 30-8 simplify(Ans) $\xrightarrow{EXE}$ 22

Interpretation: Wenn Patrick 30 Jahre alt ist, dann ist seine Schwester Emma 22 Jahre alt.

Zu 1b)

„Ein Rechteck hat den Flächeninhalt von 24 cm^2."

1. Schritt Wertetabelle: „a~1/b"

Seitenlänge a in cm	1	2	6	12	18	24
Seitenbreite b in cm	24	12	4	2	¾	1

Beispielaussage: Wenn die eine Seitenlänge 1 cm beträgt, dann ist die andere 24 cm lang.

2. Schritt Listendefinitionen und Term mit Parameter:

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Liste 1:

Seitenlänge a in cm	1	2	6	12	18	24

Liste 2:

Seitenbreite b in cm	24/1	24/2	24/6	24/12	24/18	24/24

2a) Liste 1 enthält nur bestimmte Terme als Elemente.

Listendefinition: 24/Liste1 → Liste 2 (wiederkehrender Operator: *„24 geteilt durch..."* angewendet *auf alle* Elemente der Liste 1)

2b) Einführung eines Parameters: L... Seitenlänge a in cm (siehe 1. Liste).

2c) Unbestimmter Term: 24/L... ergibt Seitenbreite b in cm (siehe 2. Liste).

3. Schritt: Prognose mittels Termwerte

ALGEBRA-Menü: substitute(24/L, L=4) $\xrightarrow{EXE}$ 24/4 simplify(Ans) $\xrightarrow{EXE}$ 6

Interpretation: Wenn die Seitenlänge des Rechtecks 4 cm beträgt, dann ist die Seitenbreite 6 cm lang.

Zum Üben im Arbeitsheft

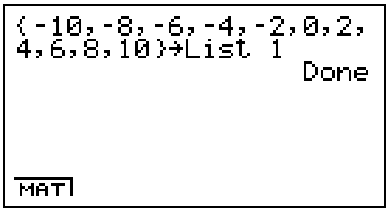
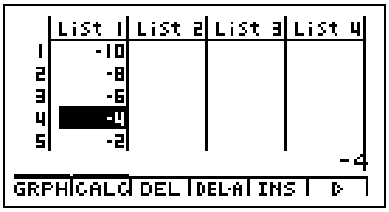
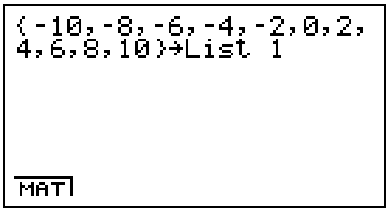
7 Bearbeite die Teilaufgabe 2c von Seite 23!

2.5 Numerische Listen

Einleitende Situation

3 Gegeben sei die numerische Liste 1 mit {–10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10}. Berechne die numerische Liste 2 über den unbestimmten Term: $\frac{5}{3-List1}$ mit dem FX 2.0! Die Bezeichnung *List 1* stellt hier einen Parameter dar.

Handlung im RUN MAT und STAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Löschen der Eingabezeile - numerische Liste in geschweiften Klammern eingeben, Ziffern durch Komma trennen	AC/ON SHIFT x –10 , –8 , –6 , –4 , –2 , 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 SHIFT /	{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10} MAT Figur 2.13

- Eingetragene numerische Liste unter dem Namen „List 1“ abspeichern	→ SHIFT 1 1 EXE	 Figur 2.14
- Wechseln in das STAT-Menü - Einzelne Elemente der numerischen Liste 1 markieren und in Statuszeile betrachten	MENU 2 ▼ ▼ ▼	 Figur 2.15
- Wechseln in das RUN-MAT-Hauptmenü - „Alte“ Eingabe zurückholen	MENU 1 ▲	 Figur 2.16

Hinweis für Zweitbelegungen: Geschweifte Klammern werden durch die Tastenkombination SHIFT x ({) und SHIFT / (}) erzeugt.

Die Bezeichnung „List“ erhält man durch Drücken der Tasten SHIFT 1 . Spezifiziert wird der generalisierte Name „List“ durch Zifferntasten zwischen 1 und 20.

8 a) Gegeben sei die numerische Liste 3 mit {-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9}. Berechne im RUN-MAT-Menü die numerische Liste 4 über den Term:

$\frac{5}{3.5 - List3}$ mit dem FX 2.0!

b) Gegeben sei die numerische Liste 5 mit {0, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5}. Berechne im RUN-MAT-Menü die numerische Liste 6 über den Term: $\frac{5}{3.5 - List5}$ mit dem FX 2.0! Was stellst Du fest? Suche nach einer Begründung und teste sie am Rechner aus! Beachte den unten stehenden Hinweis zur Fehlerbedeutung!

Zu 8a)

List 4

Zu 8b)

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Meine Feststellung:

Meine Begründung:

Mein Test:

Hinweis: Steht im Kasten *„MA-Fehler. Drücken Sie:* [ESC] " so bedeutet das eine Division durch Null, die nicht vom Rechner ausgeführt werden kann. Man muss, um weiterrechnen zu können, die Division durch Null vermeiden, indem man jenes Element der einzugebenden Liste, welches für die Division durch Null verantwortlich ist, entfernt (ausschließt) und die übrige Liste durch die [EXE] Taste erneut definiert.

Numerische Liste im RUN-MAT-Menü

Stellt man eine Ziffer in geschweifte Klammern, so erhält man eine numerische Liste der Dimension 1. Setzt man a Ziffern ($a \in \mathbb{N}$, $a>1$) getrennt durch Kommata in geschweifte Klammern, so erhält man eine numerische Liste der Dimension a.

Die aufgelisteten Ziffern nennt man Elemente der jeweiligen Liste.

Achtung: Dezimalbrüche erhalten stets einen Dezimalpunkt und kein Dezimalkomma.

Beispiele:

a) {10.5} numerische Liste der Dimension 1.
b) {5, 6} numerische Liste der Dimension 2.
c) {12.4, 0.4, 12.4} numerische Liste der Dimension 3 (Wiederholungen sind erlaubt).
d) {5, 3, 2, 1, 0, -1, -1.5, -1.9, -2} numerische Liste der Dimension 9.

9 Was haben die Begriffe Menge und Liste gemeinsam und was trennt sie voneinander?

Gemeinsamkeiten:

Unterschiede:

Speichern numerischer Listen

Numerische Listen können im RUN-MAT-Menü unter den Bezeichnungen List 1 oder List 2 oder ... oder List 20 gespeichert werden.

Beispiele:

a) {1, 2, 3} → List 1 (Tastenfolge: { 1, 2, 3 } [→] [SHIFT] [1] [1])

b) {5, 6, 8, 10} → List 2 (Tastenfolge: {5, 6, 8, 10} [→] [SHIFT] [1] [2])

2.6 Rechnen mit numerischen Listen

Wiederholen und Üben

10 *Direkte Proportionalität*

Mike fährt in den Ferien auf einem Flussschlepper. Durch die Schilder am Ufer, die in regelmäßigen Abständen aufgestellt sind und mit Hilfe einer Stoppuhr konnte Mike eine Tabelle aufnehmen. Leider ist sie uns unvollständig übermittelt worden. Ergänze die Tabelle unter der Annahme, dass der Schlepper stets gleich schnell fuhr! Bestimme zuvor einen Proportionalitätsfaktor!

Fahrtstrecke in km	10	15	20	25	30	35	40	45
Fahrtzeit in min							104	

Proportionalitätsfaktor:

4 Kennt man den Proportionalitätsfaktor k einer direkt proportionalen Zuordnung und kennt auch eine Zeile bzw. Spalte einer solchen Tabelle vollständig, dann kann man mit Hilfe von Listen und ihren Operationen schnell die entsprechende zweite Zeile bzw. Spalte berechnen.

Beispiel: k=20.86

A	3.54	7.12	10.69	10478	$5.21\ 10^6$
B					

{3.54, 7.12, 10.69, 10478, $5.21\ 10^6$} → List 1

Um die Zeile für B auszurechnen, führen wir die Operation $20.86 \cdot List1$ aus.

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

11 Erarbeite Dir hierzu eine Tastenfolge für das RUN-MAT-Menü des FX 2.0!

Meine Tastenfolge:

12 Kontrolliere durch Testen mit Listen am FX 2.0, ob Deine Überlegungen zu Auftrag 10 richtig waren! Erarbeite Dir vorher eine entsprechende Tastenfolge!

Meine Tastenfolge:

Mein FX 2.0 - Ergebnis:

Mein Vergleich mit den Lösungen aus Aufgabe 10 ergab:

13 Berechne im RUN-MAT-Menü! Definiere zuvor:
{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35} → List 1
{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} → List 2
{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} → List 3

a) $3 \cdot List1$	**b)** $List2 \cdot 0.5$	**c)** $List3 + List1$
d) $List1 - List2$	**e)** $5 \cdot List1 + 5 \cdot List2$	**f)** $List3^2$

a)
b)
c)
d)
e)
f)

14 Definiere im RUN-MAT-Menü:
{18, 25, 41} → List 1
{4, 6, 8, 10} → List 2
und berechne dann:

a) $List1 + List2$ b) $List1 / List2$

Was stellst Du fest? Was kann man daraus schlussfolgern?

Rechnen mit numerischen Listen

Mit numerischen Listen kann man rechnen.

Es gelten folgende Regeln:

Definiert seien zwei Listen: List 1 und List 2 mit

{x1, x2, ..., xn} → List 1 und

{y1, y2, ..., ym} → List 2

Wir formulieren die Rechenregeln für ein allgemeines Operationszeichen ⊗ (sprich Kreuz) und es steht stellvertretend für Plus, Minus, Mal, Dividiert oder für Hoch z.

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Regel 1:

Für jede rationale Zahl a:

$$LIST1 \otimes a = \{x1 \otimes a, x2 \otimes a, ..., xn \otimes a\}$$

Regel 2:

Für je zwei numerische Listen gleicher Dimension (n=m):

$$List1 \otimes List2 = \{x1 \otimes y1, x2 \otimes y2, ..., xn \otimes yn\}$$

Achtung: Wenn mit $\otimes$ die Division gemeint ist, dann darf die numerische Liste 2 keine Null als Element enthalten.

2.7 Terme und ihre Bereiche

Wir betrachten noch einmal die drei Beispiele aus Auftrag 2 der Lerneinheit 2. 4.

Beispiel 1a: *„Patrick ist 14 Jahre alt. Seine Schwester Emma ist 6."*

Wenn mit P das Alter von Patrick gemeint ist, dann gibt der unbestimmte Term P-8 das Alter seiner Schwester Emma an.

In den unbestimmten Term P-8 kann man für den Parameter P jede beliebige rationale Zahl einsetzen. Man erhält stets auf Grund der uneingeschränkten Ausführbarkeit der Subtraktion rationaler Zahlen wieder eine rationale Zahl. Man sagt der *Definitionsbereich für P-8* ist der gesamte Bereich der rationalen Zahlen.

Beispiel 1b: *„Ein Rechteck hat den Flächeninhalt von 24 cm².“*

Wenn mit a die Maßzahl einer Seitenlänge gemeint ist, dann gibt 24/a die Maßzahl der anderen Seitenlänge an.

In den unbestimmten Term 24/a kann man für den Parameter a jede beliebige rationale Zahl einsetzen, *außer Null* (Division durch Null nicht möglich). Man erhält stets auf Grund der uneingeschränkten Ausführbarkeit der Division rationaler Zahlen, *außer durch Null*, wieder eine rationale Zahl. Man sagt der *Definitionsbereich für 24/a* ist der gesamte Bereich der rationalen Zahlen, *außer Null*.

Beispiel 1c: *„Ein Auto hat auf 100 km Autobahn einen durchschnittlichen Benzinverbrauch von 5.6 Litern.“*

Wenn mit s der Weg in km auf Autobahnen gemeint ist, dann gibt der Term $0.056 \frac{l}{km} \cdot s$ den Benzinverbrauch dieses Autos in Litern an.

Wir betrachten zunächst den Term $0.056 \cdot s$ der Zahlenwerte, also ohne Einheit.

In den unbestimmten Term $0.056 \cdot s$ kann man für die Variable s jede beliebige rationale Zahl einsetzen. Man erhält stets auf Grund der uneingeschränkten

Ausführbarkeit der Multiplikation rationaler Zahlen wieder eine rationale Zahl. Man sagt der *Definitionsbereich für* $0.056 \cdot s$ ist der gesamte Bereich der rationalen Zahlen.

Nun betrachten wir den vollständigen Term $0.056 \frac{l}{km} \cdot s$, also mit Einheit.

Setzt man in den unbestimmten Term $0.056 \frac{l}{km} \cdot s$ für s beispielsweise 30 km ein, dann erhält man $0.056 \frac{l}{km} \cdot 30\ km = 1.68\ l$. Setzt man 0 km für s ein, dann erhält man $0.056 \frac{l}{km} \cdot 0\ km = 0\ l$. Setzt man für s einen negativen Wert ein, beispielsweise –10 km, so erhält man $0.056 \frac{l}{km} \cdot (-10)\ km = -0,56\ l$.

Macht das Sinn?

Der Definitionsbereich eines unbestimmten Terms ist ein rein mathematischer Begriff. Vom Definitionsbereich eines unbestimmten Terms unterscheidet man den *Gültigkeitsbereich*. Er ist stets *sachbezogen*. Meistens ist es so, dass der Gültigkeitsbereich weniger Werte umfasst als der Definitionsbereich. Er ist nur auf messbare Sachverhalte anwendbar und muss auch sachbezogen begründbar sein.

Betrachten wir unter diesem neuen Gesichtspunkt wieder unsere drei Beispiele von oben und erläutern dabei den Begriff Gültigkeitsbereich.

Beispiel 1a: Alter der beiden Geschwister, Patrick und Emma.

Denken wir uns in den Sachverhalt hinein.

Wenn mit P das Alter von Patrick gemeint ist, dann macht es wenig Sinn alle rationalen Zahlen für P einzusetzen, wie es der Definitionsbereich erlaubt. Denn negative rationale Zahlen und damit ein negatives Alter können wir von vornherein ausschließen. Ebenso Bruchzahlen, da das Alter im Allgemeinen in ganzen Jahren angegeben wird. Es bleiben also nur noch natürliche Zahlen übrig. Aber auch hierbei ist eine weitere Einschränkung sinnvoll, denn der Term P-8 beschreibt das Alter von Emma und hierfür ergeben die ersten sieben Jahre von Patrick ein negatives Alter und das ist sinnlos.
Auch nach oben können aus den verbleibenden natürlichen Zahlen auf Grund eines begrenzten Lebens von Patrick viele ausgeschlossen werden. Deshalb geben wir als Gültigkeitsbereich für P-8 vor: *P kann die natürlichen Zahlen von 8 bis 150 durchlaufen.*

Beispiel 1b: Ein Rechteck mit 24 cm².

Wenn mit a die Maßzahl einer Seitenlänge gemeint ist, dann macht es auch hier wenig Sinn, alle rationalen Zahlen (ohne Null), wie es der Definitionsbereich von 24/a nun einmal gestattet, für a in Betracht zu ziehen. Negative Seitenlängen für Rechtecke sind uns fremd. Wir geben als Gültigkeitsbereich an: *Für a darf man alle positiven rationalen (Maß-) Zahlen einsetzen, um den unbestimmten Term 24/a in einen bestimmten Term zu verwandeln.*

⌛ **15** Überlege an dieser Stelle, ob nicht auch eine weitere Einschränkung für große Maßzahlen a sinnvoll wäre! Entscheide und begründe sachbezogen!

Meine Entscheidung:

Meine Begründung:

Beispiel 1c: Ein Auto und sein durchschnittlicher Benzinverbrauch auf Autobahnen.

Für den Term $0.056\,\frac{l}{km}\cdot s$ geben wir als Gültigkeitsbereich an: *Der Weg s kann alle Größenwerte von 0 km bis* $5.0\cdot10^5\,km$ *annehmen. Die Einschränkung bezieht sich vor allem auf die beschränkte Genauigkeit der Weglängen.* So machen Angaben, wie zum Beispiel 2583 km, keinen Sinn, wenn das zu bildende Produkt aus Näherungswerten besteht und bekanntlich die Genauigkeit durch das Ausführen von Rechenoperationen nicht anwachsen kann. Deshalb ist es entsprechend der Faustregel für Näherungswerte bei Produkten sinnvoll, wenn man die Werte auf zwei Ziffern genau vorgibt. Also ist beispielsweise die Angabe $2.6\cdot10^3\,km$ sinnvoller als die vorherige. Die obere Begrenzung von $5.0\cdot10^5\,km$ ergibt sich aus der Tatsache, dass der Benzinverbrauch während eines „Autolebens" nicht unbedingt konstant bleiben muss und nach mehreren Inspektionen und gefahrenen Kilometern in Autowerkstätten neu reguliert werden kann.

Wir können zusammenfassen und definieren:

Definitionsbereich für unbestimmte Terme

Zu jedem unbestimmten Term existiert ein eindeutig festgelegter Definitionsbereich. Dieser beschreibt eine Menge von Zahlen, die beim Einsetzen für die Parameter den unbestimmten Term in einen bestimmten Term verwandeln kann.

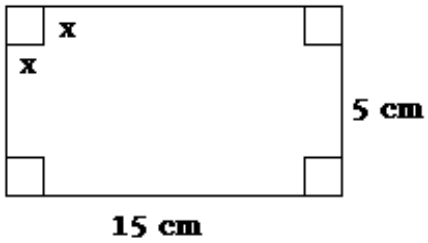
Wendet man den Begriff Definitionsbereich von unbestimmten Termen auf das ALGEBRA-Menü des FX 2.0 an, so kann man diesen Begriff wie folgt interpretieren:
Der Definitionsbereich umfasst alle Zahlen a zum unbestimmten Term T, der den Parameter x enthält, sodass der Befehl substitute(T, x=a) stets eine Zahl liefert.

Gültigkeitsbereich für unbestimmte Terme mit Größenangaben

Zu jedem unbestimmten Term, der prinzipiell messbare Größenwerte erzeugen kann, gibt es neben dem Definitionsbereich auch mindestens einen Gültigkeitsbereich. Dieser beschreibt eine Menge von Größenwerte, die beim Einsetzen für eine Variable den unbestimmten Term nicht nur in einen bestimmten Term verwandeln kann, sondern darüber hinaus auch sachlich sinnvolle Werte hervorbringt, die prinzipiell durch Messung bestätigt werden können.

Weiterführende Aufgabe zum Üben im Arbeitsheft

16 Aus einem rechteckigen Stück Pappe wird eine oben offene Schachtel hergestellt.



Dazu schneidet man an den Ecken kleine Quadrate der Seitenlänge x aus.

a) Erstelle einen Term mit dem Parameter x für das Volumen der Schachtel! Beginne mit 4 konkreten Zahlen für x und arbeite im ALGEBRA-Menü!
b) Gib den Definitionsbereich und einen Gültigkeitsbereich (mit Begründungen) für den unbestimmten Term an!
c) Definiere zu diesem Term zwei Listen mit mindestens 5 Elementen!
d) Interpretiere im STAT-Menü den Term durch Listenberechnungen!

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

3 Termtransformationen

3.1 Algebraische Rechengesetze

Einleitende Situation

1 **Gegeben sind drei Listen der Dimension 5.**

Liste 1: {16, 3/4, -8.25, 100.12, -0.00158}

Liste 2: {0.127, 56300, -1/2, 5.23 , 103.8}

Liste 3: {8, 88, 5, 55, 222}

Definiere im RUN-MAT-Menü Liste 1 bis Liste 5 und vergleiche im STAT-Menü die Werte der Listen 4 und 5 miteinander!

Liste 2 · (Liste 1 · Liste 3) ⟶ Liste 4

(Liste 1 ·Liste 2) · Liste 3 ⟶ Liste 5

Was stellst Du beim Vergleich fest? Begründe!

Wiederholen und Üben

2 **Nenne und erläutere einige Rechengesetze der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen! Verwende Variablen!**

a) **Assoziativgesetz der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen.**
b) **Kommutativgesetz der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen.**
c) **Distributivgesetz rationaler Zahlen.**
d) **Gesetz vom neutralen Element der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen.**
e) **Gesetz vom inversen Element der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen.**

a) Assoziativgesetz der Addition rationaler Zahlen:

Für alle

Assoziativgesetz der Multiplikation rationaler Zahlen:

Für alle

Erläuterung am Beispiel:

b) Kommutativgesetz der Addition rationaler Zahlen:

Für alle

Kommutativgesetz der Multiplikation rationaler Zahlen:

Für alle

Erläuterung am Beispiel:

c) Distributivgesetz rationaler Zahlen:

Für alle

Erläuterung am Beispiel:

d) Gesetz vom neutralen Element der Addition rationaler Zahlen

Es gibt

Gesetz vom neutralen Element der Multiplikation rationaler Zahlen

Es gibt

Erläuterung am Beispiel:

e) Gesetz vom inversen Element der Addition rationaler Zahlen

Für alle

Gesetz vom inversen Element der Multiplikation rationaler Zahlen

Für alle

Erläuterung am Beispiel:

Die Rechengesetze gelten nicht nur für rationale Zahlen, also für bestimmte Terme. Sie lassen sich auch auf unbestimmte Terme anwenden, solange man für die Variablen rationale Zahlen einsetzt.

Wird ein Term nach den Rechengesetzen rationaler Zahlen in einen anderen Term umgewandelt, so spricht man von einer Termumformung (Termtransformation).

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Wir wollen mit Hilfe des FX 2.0 lernen, wie die bekannten Rechengesetze auf Terme anzuwenden sind und untersuchen, welche Auswirkungen bestimmte Termtransformationen auf die Termwert-Berechnung haben. Dabei lernen wir Befehle zur Termtransformation in dem ALGEBRA-Menü kennen.

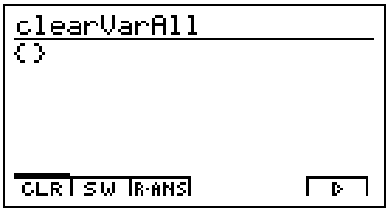
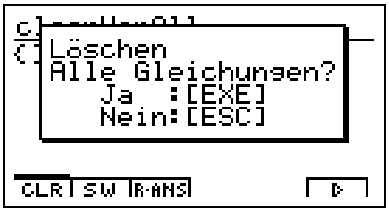
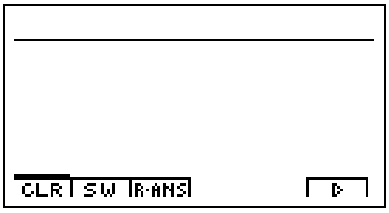
3.2 Ordnen von Termen

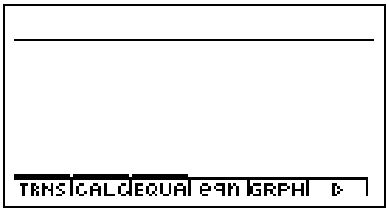
1 Was liefert der arrange-Befehl aus dem ALGEBRA-Menü, wenn man ihn auf folgenden Term anwendet? Begründe die Zuordnung mit Hilfe algebraischer Rechengesetze. Interpretiere die Auswirkungen der Termtransformation mittels numerischer Listenberechnungen im STAT-Menü!

$x \cdot (18 \cdot x^2) \cdot x$

Vorbereitungen am Rechner:

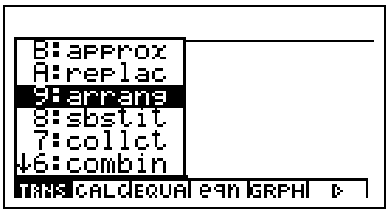
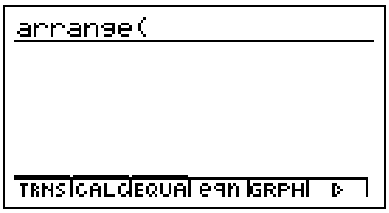
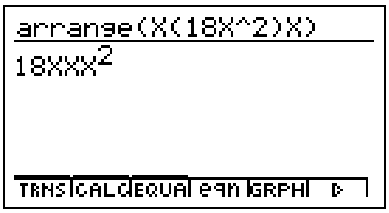
Bevor wir mit dem neuen Befehl arbeiten, bereiten wir ein „ungestörtes“ Arbeiten im ALGEBRA-Menü vor. Dazu müssen alle Variablen und der Bildschirm „gelöscht“ werden. Präge Dir diese Handlungen unter der Bezeichnung: „Initialisiere das ALGEBRA-Menü!“ ein!

Handlung im ALGEBRA-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Löschen aller ALGEBRA-Variablen	[AC/ON] [SHIFT] [ESC] (Zweitbelegung: QUIT) [F6] [F1] [2] [EXE]	 Figur 3.1
- Löschen aller Ein- und Ausgaben	[F1] [3]	 Figur 3.2
- Löschen bestätigen	[EXE]	 Figur 3.3

- Wechseln zur Eingangsleiste des ALGEBRA-Hauptmenüs	SHIFT ESC	 Figur 3.4

Nun lernen wir den arrange-Befehl in Aktion kennen. Er befindet sich im Menü TRNS (F1-Taste) des ALGEBRA-Hauptmenüs.

(I) Was liefert der arrange-Befehl aus dem ALGEBRA-Menü?
Gegeben: $x \cdot (18 \cdot x^2) \cdot x$

Handlung im ALGEBRA-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Markieren des Befehls arrang (Abk. für arrange) aus dem TRNS-Menü (Position 9)	F1 ▼ ▼ ▼	 Figur 3.5
- Befehl auswählen	EXE	 Figur 3.6
- Term eingeben (Malzeichen können weggelassen werden) - Befehl mit runder Klammer schließen - Befehl ausführen	X,O,T (18 X,O,T ^ 2) X,O,T) EXE	 Figur 3.7

Antwort: arrange($X \cdot (18 \cdot X^2) \cdot X$) $\xrightarrow{EXE}$ $18XXX^2$

Sprechweise: Der Befehl arrange, angewandt auf den Term $x \cdot (18 \cdot x^2) \cdot x$, liefert den Term $18xxx^2$.

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

(II) Begründe die Zuordnung mittels algebraischer Rechengesetze!

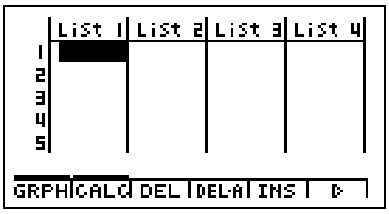
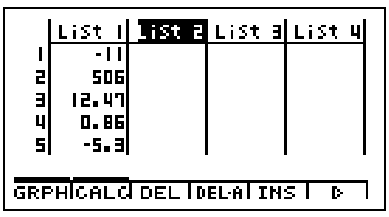
A	$x \cdot (18 \cdot x^2) \cdot x$	
1	$x \cdot 18 \cdot (x^2 \cdot x)$	Assoziativgesetz der Multiplikation
2	$18 \cdot x \cdot (x^2 \cdot x)$	Kommutativgesetz der Multiplikation
3	$18 \cdot x \cdot (x \cdot x^2)$	Kommutativgesetz der Multiplikation
E	$18xxx^2$	Assoziativgesetz der Multiplikation

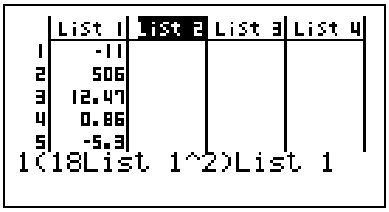
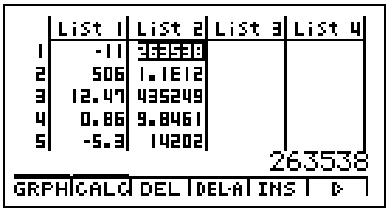
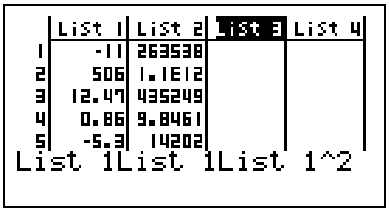
(III) Interpretiere die Auswirkungen der Termtransformation mittels numerischer Listenberechnungen im STAT-Menü!

Wir denken uns eine numerische Liste mit 6 Elementen aus und bezeichnen sie als List1.

{-11, 506, 12.47, 0.86, -5.3} → List1

In dem unbestimmten Term $x \cdot (18 \cdot x^2) \cdot x$ taucht der Parameter x auf. Diesen tauschen wir für die Listenberechnung im STAT-Menü gegen die Bezeichnung List1 aus. Wir erhalten:
$List1 \cdot (18 \cdot List1^2) \cdot List1$ und speichern diesen Term unter der Bezeichnung $List2$ im STAT-Menü ab. Ähnlich verfahren wir mit dem umgeformten Term $18xxx^2$.
$18\ List1\ List1\ List1^2$ → $List3$

Handlung im STAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Alle Spalten löschen - In Startposition (1. Zelle der Liste 1) springen	[F4] [EXE] ▶ [F4] [EXE] ▶ ... [F4] [EXE] [SHIFT] [ESC]	 Figur 3.8
- Listenelemente nacheinander eingeben - In den Tabellenkopf der zweiten Spalte springen	[(-)] 11 [EXE] 506 [EXE] 12.47 [EXE] 0.86 [EXE] [(-)] 5.3 [EXE] ▶ ▲	 Figur 3.9

- Ersten Listenterm eingeben	SHIFT 1 1 (18 SHIFT 1 1 ^ 2) SHIFT 1 1	 Figur 3.10
- List 2 erzeugen	EXE	 Figur 3.11
- In den Tabellenkopf der dritten Spalte springen - Zweiten Listenterm eingeben	▶ ▲ 18 *List*1 *List*1 *List*1 ²	 Figur 3.12
- List 3 erzeugen	EXE	 Figur 3.13
- Zeilenweiser Vergleich der zweiten und dritten Spalte	◀ ▶ ▼ ◀ ▶ ▼ ◀ ▶	 Figur 3.14

Feststellungen:

1. Die Listen 2 und 3 sind numerisch identisch. Durch die Anwendung des Befehls arrange mit arrange($x\cdot(18\cdot x^2)\cdot x$) $\xrightarrow{EXE}$ $18xxx^2$ hat sich der Termwert, bezogen auf die fünf Elemente der Liste 1, nicht geändert.
2. Diese Zuordnung stellt eine Termumformung dar. Der Beweis wurde in II gegeben.
   Die Gleichung $x\cdot(18\cdot x^2)\cdot x=18xxx^2$ *ist stets eine wahre Aussage, ganz gleich, welche rationale Zahl auch man für x einsetzen möge.*

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Zum Üben im Arbeitsheft

3 Was bewirkt der arrange-Befehl bei diesen Termen?
Hinweis: Beginne mit: „Initialisiere das ALGEBRA-Menü!“ und halte Dich prinzipiell an die drei Schritte aus dem Musterbeispiel 1! Dokumentiere alle wichtigen Handlungen!

a) $4a-2b+7a-1c+6b-1a$

b) $2x+6y+5-12x+10.5+6y-9x+3$

arrange-Befehl

Mit Hilfe des arrange-Befehls aus dem ALGEBRA/TRNS-Menü kann man Terme ordnen. In einem Produkt stehen am Anfang Zahlen. Daran anschließend folgen die variablen Teilterme in alphabetischer Reihenfolge. In Summen oder Differenzen stehen zuerst die variablen Teilterme und dann folgen Zahlen. Dabei werden algebraische Rechengesetze stets eingehalten.

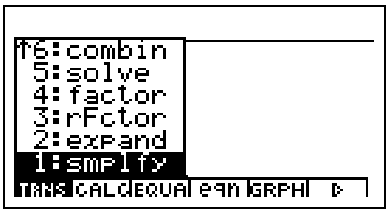
Syntax: arrange(❶) $\xrightarrow{\text{EXE}}$ „geordneter Term“ ❶ ... Term

3.3 Zusammenfassen von Termen

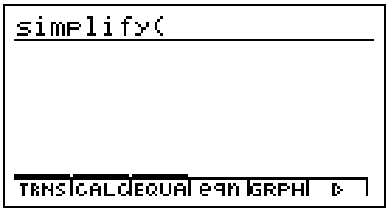
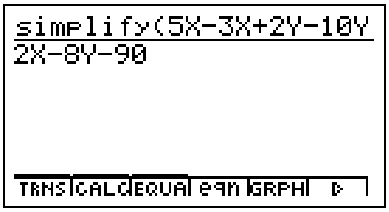
2 Was liefert der simplify-Befehl aus dem ALGEBRA-Menü, wenn man ihn auf folgenden *geordneten Term* anwendet? Begründe die Zuordnung mit Hilfe algebraischer Rechengesetze und interpretiere die Auswirkungen der Termtransformation mittels numerischer Listenberechnungen im STAT-Menü!
$5x-3x+2y-10y+7-97$

Vorbereitungen am Rechner: Initialisiere das ALGEBRA-Menü!

(I) Was liefert der Befehl $simplify(5x-3x+2y-10y+7-97)$?

Handlung im ALGEBRA-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Markieren des Befehls smplfy (Abk. für simplify) aus dem TRNS-Menü (Position 1)	F1	

Figur 3.15

- Befehl auswählen	EXE	 Figur 3.16
- Term eintragen - Befehl mit runder Klammer schließen - Befehl ausführen	$5X-3X+2Y-10Y+7-97$) EXE	 Figur 3.17

Antwort: simplify($5X-3X+2Y-10Y+7-97$) $\xrightarrow{EXE}$ $2X-8Y-90$

Sprechweise: Der Befehl simplify, angewandt auf den Term $5x-3x+2y-10y+7-97$, liefert den Term $2x-8y-90$.

(II) Begründe die Zuordnung mittels algebraischer Rechengesetze!

A	$5x-3x+2y-10y+7-97$	
1	$x\cdot(5-3)+y\cdot(2-10)+(7-97)$	Distributivgesetz, Assoziativgesetz der Addition
2	$x\cdot 2+y\cdot(-8)-90$	5-3=2, 2-10=-8 und 7-97=-90
E	$2x-8y-90$	Kommutativgesetz der Multiplikation

(III) Interpretiere die Auswirkungen der Termtransformation mittels numerischer Listenberechnungen im STAT-Menü!

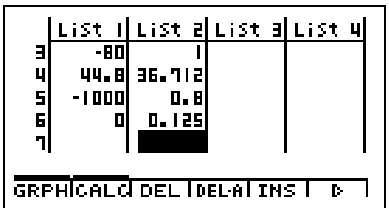
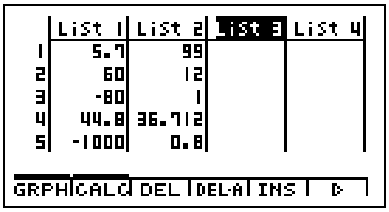
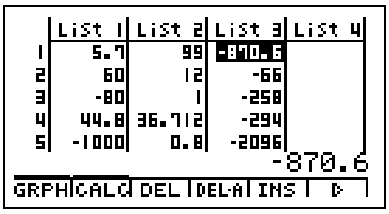
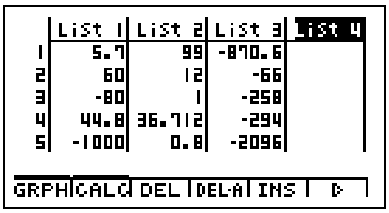
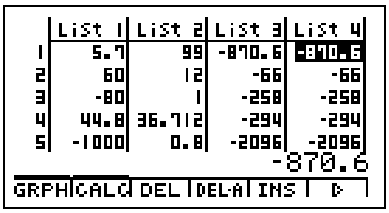
Wir denken uns zwei *gleichdimensionierte* Listen mit je 6 Elementen aus und bezeichnen sie als List1 und List 2.

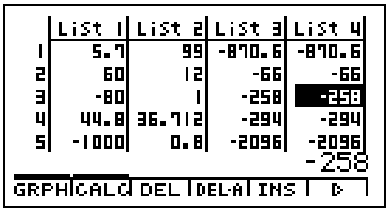
{5.7, 60, -80, 44.8, -1000, 0} → List1

{99, 12, 1, 36.712, 0.8, 0.125} → List2

In dem unbestimmten Term $5x-3x+2y-10y+7-97$ tauchen die Parameter x und y auf. Diese tauschen wir für die Listenberechnung im STAT-Menü gegen die Bezeichnungen List1 für x und List 2 für y aus. Wir erhalten:
$5List1-3List1+2List2-10List2+7-97$ und speichern diesen Term unter der Bezeichnung $List3$ im STAT-Menü ab. Ähnlich verfahren wir mit dem umgeformten Term $2x-8y-90$.
$2List1-8List2-90$ → $List4$

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Handlung im STAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Alle Spalten löschen - In Startposition springen	[F4] [EXE] ▶ [F4] [EXE] ▶ ...▶ [F4] [EXE] [SHIFT] [ESC]	 Figur 3.18
- Ersten beiden Spalten mit Listenelemente ausfüllen	5.7 [EXE] 60 [EXE] –80 [EXE] 44.8 [EXE] –1000 [EXE] 0 [EXE] ▶ 99 [EXE] 12 [EXE] 1 [EXE] 36.712 [EXE] 0.8 [EXE] 0.125 [EXE]	 Figur 3.19
- In den Tabellenkopf der dritten Spalte springen	▶ ▲	 Figur 3.20
- Inhalt von List 3 eingeben	5 [SHIFT] [1] [1] $-3List1+2List2$ $-10List2+7-97$ [EXE]	 Figur 3.21
- In den Tabellenkopf der vierten Spalte springen	▶ ▲	 Figur 3.22
- Inhalt von List 4 eingeben	$2List1-8List2-90$ [EXE]	 Figur 3.23

- Zeilenweiser Vergleich der dritten und vierten Spalte	◀ ▶ ▼ ◀ ▶ ▼ ◀ ▶ … … …	

Figur 3.24

Feststellungen:

1. Die Liste 3 und 4 sind numerisch identisch. Durch die Anwendung des Befehls simplify mit simplfy($5X-3X+2Y-10Y+7-97$) $\xrightarrow{EXE}$ $2X-8Y-90$ hat sich der Termwert, bezogen auf die sechs Elementen der Liste 1 und Liste 2, nicht geändert.
2. Diese Zuordnung stellt eine Termumformung dar. Der Beweis wurde in II gegeben.
   Die Gleichung $5x-3x+2y-10y+7-97=2x-8y-90$ *ist stets eine wahre Aussage, ganz gleich, welche rationalen Zahlen für x und y eingesetzt werden.*

Zum Üben im Arbeitsheft

⧖ 4 Denke Dir einen geordneten Term mit v und w als Parameter aus!
Was bewirkt der simplify-Befehl bei diesem Term?
Hinweis: Beginne mit: „Initialisiere das ALGEBRA-Menü!“ und halte Dich prinzipiell an die drei Schritte aus dem Musterbeispiel 2! Dokumentiere alle wichtigen Handlungen!

simplify-Befehl

Mit Hilfe des simplify-Befehls aus dem ALGEBRA/TRNS-Untermenü kann man Terme zusammenfassen (vereinfachen). Dabei werden algebraische Rechengesetze stets eingehalten.

Syntax: simplify(❶) $\xrightarrow{\text{EXE}}$ „zusammengefasster Term“ ❶ ... Term

3.4 Addition und Subtraktion von Summen

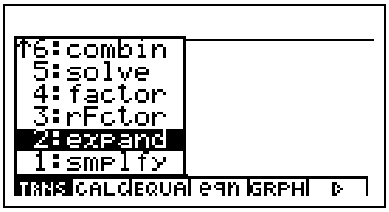
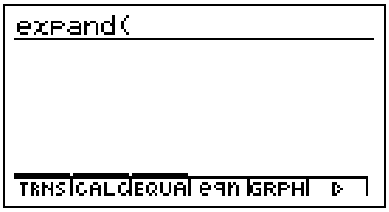
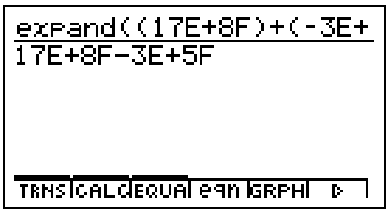
Auf Grund des Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen kann man statt (a+b)+c bzw. statt a+(b+c) einfach a+b+c schreiben. Das bedeutet für das Rechnen mit rationalen Zahlen, dass Klammern in Summen (Plus vor einer Klammer) weggelassen werden können. Für das so genannte Auflösen von Klammern steht uns der expand-Befehl des FX 2.0 zur Verfügung.

3 Was liefert der expand-Befehl aus dem ALGEBRA-Menü, wenn man ihn auf den folgenden Term anwendet? Begründe die Zuordnung mit Hilfe algebraischer Rechengesetze und interpretiere die Auswirkungen der Termtransformation mittels numerischer Listenberechnungen im STAT-Menü!
$(17e+8f)+(-3e+5f)$

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Vorbereitung am Rechner: Initialisiere das ALGEBRA-Menü!

(I) Was liefert der expand-Befehl aus dem ALGEBRA-Menü?
$(17e+8f)+(-3e+5f)$

Handlung im ALGEBRA-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Markieren des expand-Befehls aus dem TRNS-Menü (Position 2)	F1 ▲	 Figur 3.25
- Befehl auswählen	EXE	 Figur 3.26
- Term eintragen - Befehl mit runder Klammer schließen - Befehl ausführen	$(17E+8F)+(-3E+5F)$) EXE	 Figur 3.27

Antwort: expand($(17E+8F)+(-3E+5F)$) $\xrightarrow{EXE}$ $17E+8F-3E+5F$

Sprechweise: Der Befehl expand, angewandt auf den Term $(17E+8F)+(-3E+5F)$, liefert den Term $17e+8f-3e+5f$.

(II) Begründe die Zuordnung mittels algebraischer Rechengesetze!

A	$(17e+8f)+(-3e+5f)$	
1	$17e+(8f-3e+5f)$	Assoziativgesetz der Addition
E	$17e+8f-3e+5f$	Assoziativgesetz der Addition

Wiederholen und Üben im Arbeitsheft

5 Führe nun den III. Schritt aus:
Interpretiere die Auswirkungen der Termtransformation mittels numerischer Listenberechnungen im STAT-Menü! Dokumentiere Deine Ergebnisse, einschließlich Deiner Feststellungen!

Wiederholen, Üben und Einführen

6 Ergänze die folgende Tabelle! Benutze keinen Rechner!

x	108								
1x		-0.56						-(-12)	
- x			1/2				2.468		
(-1)x				0	-10^8				
1x+(-1)x						0			
-x+x									30

Aus dem bekannten algebraischen *Gesetz*: *Für alle rationalen Zahlen x gilt: 1x+(-1)x=0,* folgt die Aussage:
Für alle rationalen Zahlen x gilt: (-1)x = -1x=-x (Gesetz zur Bildung entgegengesetzter Zahlen oder auch Gegenzahlen)
Verbal ausgedrückt bedeutet dieses Gesetz: Die entgegengesetzte rationale Zahl zu x erhält man durch Multiplikation mit –1.

7 Nenne die Bezeichnung des nachfolgenden Gesetzes! Interpretiere es mit Deinen Worten!
Für alle rationalen Zahlen a gibt es genau eine rationale Zahl b, ergo gilt: a+b=b+a=0

Bezeichnung:

Interpretation:

8 Ergänze folgende Tabelle!

	a	b	c	a-(b+c)	a+b-c	a-b+c	a-b-c
	List 1	List 2	List 3	List 4	List 5	List 6	List 7
1	12	2	5				
2	-1	-5	6				
3	12.48	3.145	45.015				
4	-5000	7.0045	-17594				
5	-4359	-0.0075	0				
6	0	856007	72846				

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Wir wollen immer dann von einer Termumformung sprechen, wenn sich einerseits zwar die Gestalt der Terme ändert, andererseits aber keine Änderungen bezüglich der tatsächlichen Termwerte festzustellen sind, ganz gleich, welche Zahlen man aus dem Definitionsbereich der beiden Terme für die auftretenden Variablen auch einsetzen möge.

Aus den obigen numerischen Listenrechnungen kann man *vermuten*, dass folgende Termumformung gilt:

Wenn *für alle Elemente der Listen 1, 2 und 3 aus einem Zahlenbeispiel* gilt:
List 1-(List 2+List 3) = List 1-List 2-List 3, *dann gilt vermutlich* auch:
Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt: a-(b+c) = a-b-c.

Wir müssen uns also die Frage stellen: Gilt die Gleichung a-(b+c) = a-b-c *für alle* rationale Zahlen ohne Ausnahme? Denn nur dann können wir von einer Termumformung sprechen.

4 Beweis: Wir wollen zeigen, dass für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:
a-(b+c) = a-b-c.

A	*Wir betrachten* die linke Seite der zu beweisenden Gleichung. Die linke Seite sagt aus, dass von der Zahl a die Summe b+c zu subtrahieren ist. *Wir wissen:* Die Subtraktion der Summe b+c ist gegen die Addition der zu b+c entgegengesetzten Zahl austauschbar. Für alle rationalen Zahlen x, y gilt: $x-y=x+(-1)y$	$a-(b+c)$
2	Die zu $b+c$ entgegengesetzte Zahl erhalten wir durch Multiplikation mit (-1).	$(-1)\cdot(b+c)$.
3	Nach dem Distributivgesetz rationaler Zahlen folgt:	$(-1)\cdot(b+c)=(-1)\cdot b+(-1)\cdot c$
4	Nach dem Gesetz zur Bildung entgegengesetzter Zahlen folgt:	$=(-b)+(-c)$
5	Der letzte rechte Term sagt aus, dass die beiden entgegengesetzten Zahlen zu b und c addiert werden. Um die Klammern aufzulösen, wenden wir nun den *expand-Befehl* an.	$expand((-B)+(-C))$ ergibt im ALGEBRA-Menü: $-B-C$
6	Es gilt dann *für alle* rationalen Zahlen a, b und c:	$a-(b+c)=a+(-b-c)$
7	Nach nochmaliger Anwendung des *expand-Befehls*	$expand(A+(-B-C))$ ergibt im ALGEBRA-Menü: $A-B-C$

8	Damit erhalten wir durch Zusammenfassen aller Umformungen:	$a-(b+c)=a+(-b-c)$ $=a-b-c$
E	*Schluss als Regel:* Man kann von einer Zahl eine Summe subtrahieren, indem man jeden Summanden von dieser Zahl subtrahiert.	*Für alle* rationalen Zahlen a, b und c gilt: a-(b+c) = a-b-c

Anwendung findet dieses Rechengesetz beim schriftlichen Subtrahieren mit mehr als zwei Zahlen. Dazu muss man die linke und rechte Seite der Gleichung a-(b+c) = a-b-c gegeneinander austauschen.

9 Führe die nebenstehende schriftliche Subtraktion aus und erläutere an diesem Beispiel, wie hierbei unser neues Rechengesetz zur Anwendung kommt!

```
  1 9 9 8
-   3 2 7
-   5 7 3
-     5 6
-------------
=============
```

expand-Befehl

Mit Hilfe des expand-Befehls aus dem ALGEBRA/TRNS-Menü kann man Terme mit geklammerten Teiltermen in Terme ohne Klammern umformen. Dabei werden algebraische Rechengesetze stets eingehalten.

Syntax: expand(❶) $\xrightarrow{\text{EXE}}$ „Term ohne Klammern“

❶ ... Term mit geklammerten Teiltermen

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

3.5 Äquivalente Terme

Wie wir bereits wissen, formen die Befehle arrange und expand im ALGEBRA-Menü Terme so um, dass keinerlei Änderungen an den tatsächlichen Termwerten auftreten, ganz gleich, welche rationalen Zahlen man auch für die auftretenden Variablen einsetzen möge. Diese Eigenschaft kennzeichnen wir durch den Begriff *äquivalente Terme*.

Äquivalente Terme

Zwei Terme T1 und T2 heißen genau dann äquivalent, wenn gilt:

1. T1 und T2 sind entweder bestimmte Terme und beschreiben beide die gleiche Zahl

   oder

2. T1 und T2 sind unbestimmte Terme, haben den gleichen Definitionsbereich und zeigen für alle Elemente des gemeinsamen Definitionsbereich nach einer Termwert-Bestimmung durch Wertersetzung stets die gleichen Zahlen an.

Ob zwei Terme äquivalent sind oder nicht, lässt sich nur durch allgemein gültige Rechengesetze begründen.

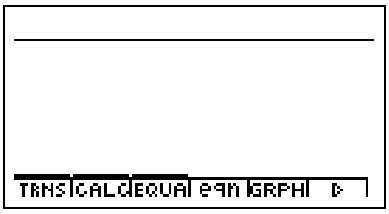
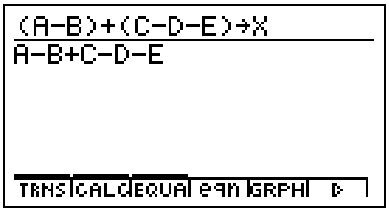
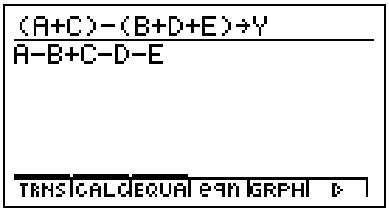
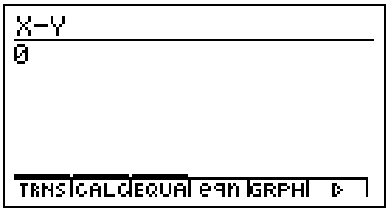
Erläuterung: Gegeben seien die Terme T1 und T2 mit (a-b)+(c-d-e)→T1 und (a+c)-(b+d+e)→T2.

Über den substitute-Befehl oder über Listenberechnungen kann man für beliebige Ersetzungen der Variablen a, b, c, d und e durch rationalen Zahlen zeigen, dass Gleichheit zwischen T1 und T2 vorliegt. Aber wie bereits bekannt ist, ist eine solche Schlussweise kein Beweis für allgemein gültige Aussagen. Deshalb sucht man nach geeigneteren Begründungsmethoden. Eine solche wird jetzt vorgestellt. Dazu ist es notwendig, in ein anderes Hauptmenü zu wechseln.

5 Beweise die Gültigkeit der Aussage im CAS-Menü: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, d und e gilt: (a-b)+(c-d-e) = (a+c)-(b+d+e).

Die Abkürzung CAS steht für Computer-Algebra-System. In diesem Menü kann man ähnlich arbeiten wie im ALGEBRA-Menü. Der substitute-Befehl und der expand-Befehl sind auch hier im TRNS-Menü implementiert. Der arrange-Befehl ist hier nicht auffindbar. Doch zuvor sollte das CAS-Menü auf die gleiche Art und Weise initialisiert werden wie das ALGEBRA-Menü.

Wir werden den linken Term der Gleichung eingeben und ihn mit der Pfeiltaste unter dem Namen X abspeichern. Ähnlich verfahren wir dann mit dem rechten Term.

Handlung im CAS-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Initialisieren des CAS-Menüs	AC/ON SHIFT ESC F6 F1 2 EXE F1 3 EXE SHIFT ESC	 Figur 3.28
- linken Term eingeben und - unter dem Namen X abspeichern	AC/ON (A-B)+ (C-D-E) → X EXE	 Figur 3.29
- rechten Term eingeben und - unter dem Namen Y abspeichern	AC/ON (A+C)-(B+D+E) → Y EXE	 Figur 3.30
- Differenz aus X und Y bilden und auf den Wert 0 testen	AC/ON X-Y EXE	 Figur 3.31

10 Begründe mit einem algebraischen Rechengesetz, warum man mit dem Test: X-Y ergibt Null, die Gleichheit von 5 gezeigt hat! Formuliere das Gesetz mit Hilfe von Variablen!

Üben im Arbeitsheft

11 Beweise die Gültigkeit der Aussage ohne Rechner: Für alle rationalen Zahlen a, b, c, d und e gilt: (a-b)+(c-d-e) = (a+c)-(b+d+e). Gehe dabei ähnlich wie in 4 vor!

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

3.6 Multiplikation von Produkten

Wiederholen, Üben und Einführen

Wir wissen bereits, wie man mit Hilfe des substitute-Befehls unbestimmte in bestimmte Terme überführen kann. *Denn uns ist bekannt*:

substitute-Befehl

Mit Hilfe des substitute-Befehls aus dem ALGEBRA/TRNS-Untermenü kann man unbestimmte Terme mit einer Variablen über eine Wertzuweisung in bestimmte Terme umwandeln.

Syntax: substitute(❶, ❷) $\xrightarrow{\text{EXE}}$ exakter Zahlenwert

❶ ... Term mit einer Variable
❷ ... Gleichung: Variable = Zahl (Wertzuweisung)

Man kann die Syntax dieses Befehls für umfangreiche Termersetzungen erweitern, indem man mehr als einen Parameter zulässt.

12 Teste im ALGEBRA-Menü den Befehl $substitute(8A \cdot 50B,\ A=2,\ B=1)$ aus!
Probiere auch $substitute(8A \cdot 50B,\ A=2,\ B=3)$,
$substitute(8A \cdot 50B,\ A=4/3,\ B=3)$,
$substitute(8A \cdot 50B,\ A=X,\ B=Y)$,
$substitute(8A \cdot 50B \cdot 3C,\ A=5,\ B=6,\ C=10)$,
$substitute(8A \cdot 50B \cdot 3C,\ A=R,\ B=S,\ C=T)$ aus!
Beschreibe, wie die Syntax allgemein aufgebaut ist!

substitute-Befehl

Mit Hilfe des substitute-Befehls aus dem ALGEBRA/TRNS-Menü kann man unbestimmte Terme mit mehreren Variablen über eine Wertzuweisung in bestimmte Terme umwandeln.

Syntax: substitute

In den Termen $5a+6b-1c$ oder $(-8)y \cdot \frac{1}{4}z$ kennzeichnen das Produkt 5a ein *Vielfaches* von a, das Produkt 6b ein *Vielfaches* von b, das Produkt (-1)c ein *Vielfaches* von c, das Produkt (-8)y ein *Vielfaches* von y und das Produkt 1/4 z ein *Vielfaches* von z.

Man bezeichnet die (Vor-) Zahl 5 als *Koeffizient* von a, die (Vor-) Zahl 6 als *Koeffizient* von b, die (Vor-) Zahl (-1) als *Koeffizient* von c, die (Vor-) Zahl (-8) als *Koeffizient* von y und die (Vor-) Zahl 1/4 als *Koeffizient* von z.

13 Gib alle Koeffizienten und ihre zugehörigen Variablen an!

a) $3.5x-\frac{5}{3}y$ b) $\frac{4}{3}s\cdot(-\frac{1}{2})t$ c) $16.478\ r\ (5n-7k)\ \frac{7}{3}\ m$

14
a) Bilde das Produkt aus 3a und 2b!
b) Interpretiere die Produktbildung als Flächeninhaltsberechnung an einem Rechteck und seiner Teilrechtecke! Gib eine Skizze an!
c) Berechne im Kopf das Produkt aus a) für a=2, b=3 bzw. für a=5 und b=4!
d) Vereinfache im ALGEBRA-Menü mit Hilfe des simplify-Befehls das Produkt aus a) und beschreibe einen daraus ableitbaren Rechenvorteil für c)!
e) Veranschauliche den Rechenvorteil mit Hilfe geeigneter Rechenbäume!

Zu a)

Zu b)

Zu d)

Zu e)

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

15 a) **Vereinfache mit Hilfe des simplify-Befehls folgende drei Produkte und leite aus den Beispielen eine Vermutung für eine allgemein gültige Regel zur Produktvereinfachung ab! Verwende dabei den neuen Begriff Koeffizient!**

(I) $2.5ab \cdot 3c$ **(II)** $5x \cdot 6y \cdot 8x \cdot 10x^2$ **(III)** $(-100u^3) \cdot 850u^2 \cdot (-\frac{3}{4}ut)$

b) **Teste mit dem simplify-Befehl an weiteren vier selbstausgedachten Produktbeispielen Deine vermutete Regel! Protokolliere die Tests!**

c) **Mit welchen Rechengesetzen kannst Du Deine Vermutung begründen?**

a) $simplify(2.5AB \cdot 3C) \rightarrow$

$simplify(5X \cdot 6Y \cdot 8X \cdot 10X^2) \rightarrow$

$simplify((-100U^3) \cdot 850U^2 \cdot (-\frac{3}{4}UT)) \rightarrow$

Vermutete Regel: Um das Produkt von zwei Termen zu bilden, multipliziert man das

Beim Multiplizieren gleicher Variablen beachte man:

Zum Beispiel: $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ oder $b^3 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = b^7$

b) Testprotokoll:

simplify	Regel bestätigt: Ja / Nein
simplify	Regel bestätigt: Ja / Nein
simplify	Regel bestätigt: Ja / Nein
simplify	Regel bestätigt: Ja / Nein

c) Begründung:

3.7 Division von Produkten

Einführen und Üben

⧖ **16** **Bestimme im ALGEBRA-Menü die Ausgaben von**

a) $simplify(15M/(3N)) \rightarrow$

b) $simplify(15MN/(5N)) \rightarrow$

c) $simplify(2XY/(14YX)) \rightarrow$

⧖ **17** **Bestimme den Definitionsbereich von**

a) 15m/3n
b) 15mn/5n
c) 2xy/14yx

Zu a) 15m/3n: Für m darf man alle rationalen Zahlen einsetzen.
Für n darf man alle rationalen Zahlen einsetzen, außer Null.
Zu b) 15mn/5n:

Zu c) 24xy/14yx:

Zum Üben im Arbeitsheft

⧖ **18**

a) Formuliere für das Dividieren von Termen eine Vermutung für eine allgemein gültige Regel!
b) Teste mittels Handrechnung ähnliche Terme wie in ⧖ 16 aus!
c) Bestätige oder widerlege mit dem simplify-Befehl die Ergebnisse der Handrechnung!
d) Bestätige durch verschiedene Wertzuweisungen die Äquivalenz der Terme! Benutze den substitute-Befehl!
e) Beweise Deine Vermutung!

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Zusammenfassung:

Multipliziert oder dividiert man Terme, so entsteht nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation ein äquivalenter Term.

Beispielsweise gilt nach dem Assoziativ- und Kommutativgesetz der Multiplikation:

a) $2x \cdot 4y \cdot 5z = (2 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (x \cdot y \cdot z) = 40xyz$

Schluss: $2x \cdot 4y \cdot 5z$ ist äquivalent zu $40xyz$ für alle x, y, z $\in \mathbb{Q}$.

Interpretation: Das bedeutet, ganz gleich, welche Zahlen man für x, y oder z in beide Terme gleichzeitig einsetzt, es entstehen immer die gleichen Werte.

b) $\frac{(-24k^2)}{4k} = (-24k^2) \cdot \frac{1}{4k}$ *und* $k \neq 0$ („Brüche werden dividiert ...“)

$$= ((-24) \cdot \frac{1}{4}) \cdot (k^2 \cdot \frac{1}{k})$$
$$= (-6) \cdot k$$
$$= -6k$$

Schluss: $\frac{(-24k^2)}{4k}$ ist äquivalent zu $-6k$ für alle k$\in \mathbb{Q}$ und k$\neq$0.

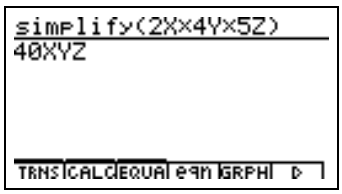
Interpretation: Das bedeutet, ganz gleich, welche Zahlen man für k in beide Terme gleichzeitig einsetzt, es entstehen immer die gleichen Werte. Eine Ausnahme bildet allerdings die Zahl Null. Wenn es sich um äquivalente Terme handeln soll, so muss die Null für beide Terme aus dem jeweiligen Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

c) $\frac{a}{a \cdot b} = \frac{1}{b}$ *und* $a \cdot b \neq 0$

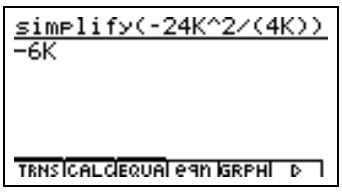
Schluss: $\frac{a}{a \cdot b}$ ist äquivalent zu $\frac{1}{b}$ für alle a, b$\in \mathbb{Q}$ und $a \cdot b \neq 0$.

Interpretation: Das bedeutet, ganz gleich, welche Zahlen man für a und b in beide Terme gleichzeitig einsetzt, es entstehen immer die gleichen Werte. Eine Ausnahme bildet dabei die Zahl Null. Sie darf weder für a noch für b eingesetzt werden. Wenn es sich um äquivalente Terme handeln soll, so muss die Null für beide Terme aus dem jeweiligen Definitionsbereich ausgeschlossen werden!

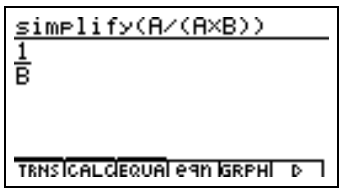
Die Multiplikation oder Division von Termen kann man mit dem FX 2.0 über den simplify-Befehl aus dem ALGEBRA/TRNS-Untermenü ausführen. Bei der Eingabe von Brüchen sind im Allgemeinen Klammern um die Terme im Nenner zu setzen.



Figur 3.32



Figur 3.33



Figur 3.34

Achtung: Man beachte eine eventuell notwendige Einschränkung des Definitionsbereiches durch einen möglichen Ausschluss der Division durch Null!

3.8 expand-Befehl und Distributivgesetz

Wiederholen und Üben im Arbeitsheft

19

a) Stelle zur Bestimmung des Termwertes von $1.25(4x+\frac{8}{10}y)$ für x=40 und y=25 einen Rechenbaum auf und bestimme ohne Rechner den Termwert in vereinfachter Form.

b) Berechne im RUN-MAT-Menü ebenso das Produkt und vergleiche mit dem Ergebnis aus a)!

c) Berechne mit Hilfe der Befehle substitute und simplify auch im ALGEBRA-Menü das Produkt! Protokolliere Ein- und Ausgaben! Vergleiche mit den Ergebnissen aus a) und b)!

Der Aufwand zur Termwertberechnung, ohne Zuhilfenahme des Rechners, kann erleichtert werden, indem man den Term $1.25(4x+\frac{8}{10}y)$ in den äquivalenten Summenterm 5x+y umformt.

20

a) Bestimme im ALGEBRA-Menü den Wert der Befehlskette simplify(expand(1.25(4X+(8/10)Y))))! Protokolliere Ein- und Ausgaben!

b) Begründe das Ergebnis mit Hilfe des Distributivgesetzes!

c) Inwiefern kann hierbei von einer Erleichterung einer Termwert-Bestimmung gesprochen werden?

a) Eingabe: Ausgabe:

b) Distributivgesetz: Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:

Begründung:

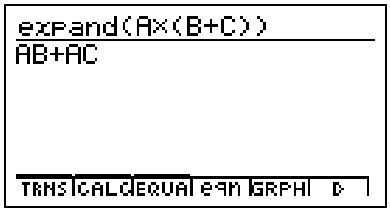
c)

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

expand-Befehl zur Summenbildung

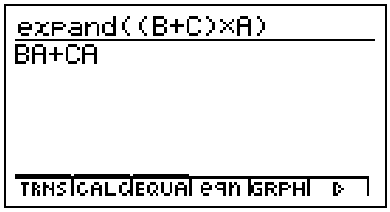
Mit Hilfe des expand-Befehls aus dem ALGEBRA/TRNS-Untermenü kann man nach dem Distributivgesetz Produktterme in Summenterme umwandeln. Diese Art der Umwandlung nennt man Ausmultiplizieren oder auch Entwickeln. Die Terme vor und nach der Umwandlung sind äquivalent zueinander.

Beispiele:



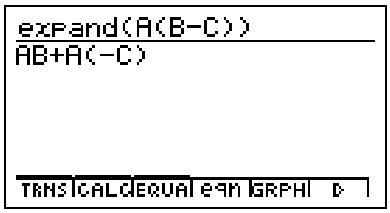
Figur 3.35

Die Summe B+C wird von links mit A ausmultipliziert.



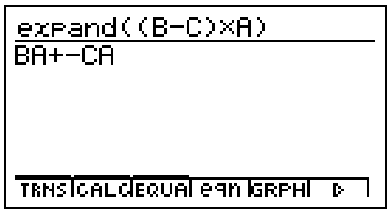
Figur 3.36

Die Summe B+C wird von rechts mit A ausmultipliziert.



Figur 3.37

Die Differenz B-C wird von links ausmultipliziert. Das Ergebnis ist eine Summe. Die Klammern um –C im Ergebnis sind notwendig.



Figur 3.38

Die Differenz B-C wird von rechts ausmultipliziert. Das Ergebnis ist eine Summe. Die Klammern um –C im Ergebnis sind nicht notwendig.

Zum Üben im Arbeitsheft

⌛ **21** a) Betrachte die Ausgabeterme in den Figuren 3.35 und 3.36. Sind die Terme äquivalent? Begründe!

b) Erläutere den Begriff äquivalenter Term! Benutze hierzu zwei Termbeispiele, die denen aus den Figuren 3.35 bis 3.38 ähnlich sind!

c) Begründe, warum in den Ausgabetermen die Klammern um –C in Figur 3.37 notwendig und in Figur 3.38 nicht notwendig sind!

Mit dem expand-Befehl können auch mehrgliedrige Terme verarbeitet werden.

6 Wandle in einen Summenterm um!
$5(g+h-k)-7(da+sa)$

expand($5(G+H-K)-7(DA+SA)$) → $5G+5H+5(-K)-7DA-7SA$

Mit dem expand-Befehl können auch Quotiententerme in Summen äquivalent verwandelt werden.

7 Wandle den Term $\frac{a+b-c}{5}$ in einen Summenterm um! Begründe diese Termumformung mit Hilfe des Distributivgesetzes!

Wir zeigen die Richtigkeit der Umformung: expand((A+B-C)/5) → $\frac{A}{5}+\frac{B}{5}-\frac{C}{5}$

A	$\frac{a+b-c}{5}$	
1	$\frac{1}{5}\cdot(a+b-c)$	Allgemein: $\frac{x}{y}=\frac{1}{y}\cdot x$ für alle x, y$\in\mathbb{Q}$ und y≠0 („Brüche werden dividiert,...“).
2	$\frac{1}{5}\cdot((a+b)-c)$	Assoziativgesetz der Addition
3	$\frac{1}{5}\cdot(a+b)\frac{1}{5}\cdot(-c)$	Distributivgesetz
4	$\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}b-\frac{1}{5}c$	Distributivgesetz
E	$\frac{a}{5}+\frac{b}{5}-\frac{c}{5}$	$\frac{1}{y}\cdot x=\frac{x}{y}$ für alle x, y$\in\mathbb{Q}$ und y≠0

Zum Üben im Arbeitsheft

Mit dem expand-Befehl können Summen untereinander oder auch Summen mit Differenzen multipliziert werden.

22 Wandle in einen Summenterm um! Begründe jede dieser Termumformung!

a) $(m+n)\cdot(k+l)$

b) $(u+v)\cdot(u+v)$

c) $(2w-3r)\cdot(100t+4r)$

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

3.9 Gegenspieler zum expand-Befehl

Wiederholen und Üben im Arbeitsheft

23 a) Zerlege in Primfaktoren!
25, 330, 3360

b) Bilde den größten gemeinsamen Teiler!
ggT(24, 70), ggT(106, 159)

Erläutere das hier angewendete Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers!

c) Erläutere an Beispielen den Unterschied zwischen den Begriffen *gemeinsamer Teiler* und *größter gemeinsamer Teiler*!

Wir wissen: Mit dem expand-Befehl können Produkte in gleichwertige Summen umgewandelt werden. Dabei wird das Distributivgesetz verwendet:

Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt:

(1) $a(b+c) \rightarrow ab+ac$ (Produkt → Summe) *und*

(2) $ab+ac \rightarrow a(b+c)$ (Summe → Produkt).

Wir fragen uns: Gibt es einen Befehl im FX 2.0, der gerade nach der Termumformungsregel (2) des Distributivgesetzes arbeitet?

Anders ausgedrückt: Gibt es einen Befehl, der den Parameter des expand-Befehls - im Beispiel gekennzeichnet mit einem „?“ - *eindeutig* zurückliefert: expand(?)→ $16x^2+48x$

8 Schreibe als Produkt!

$6xy+8xz$

Gehe so vor:

1. *Zerlege die gegebene Summe in einzelne Summanden!*
2. *Suche in beiden Summanden nach gemeinsamen Teilern!*
3. *Schreibe den gemeinsamen Teiler vor eine Klammer!*
4. *Dividiere jeden Summanden durch den gemeinsamen Teiler!*
5. *Vervollständige die Termumformung nach der zweiten Regel zum Distributivgesetz!*
6. *Kontrolliere Dein Ergebnis mit der ersten Regel des Distributivgesetzes!*

1.) *Summe:* 6xy+8xz $\xrightarrow{\text{Zerlegung in Summanden}}$ 6xy, 8xz

2.) *Summanden:*

$$6xy \xrightarrow{\text{Zerlegung in Primfaktoren}} 2 \cdot 3 \cdot xy$$
$$8xz \xrightarrow{\text{Zerlegung in Primfaktoren}} 2^3 \cdot xz$$

Gemeinsame Teiler von 6xy und 8xz sind: 2 und x.

3.) *Beispielsweise mit gemeinsamen Teiler 2:* 2( )

4.) *Division jedes Summanden durch den gewählten gemeinsamen Teiler:*

6xy/2→ 3xy und 8xz/2→ 4xz

5.) *Vervollständigung nach der Regel:* $ab+ac \rightarrow a(b+c)$

6xy+8xz → 2(3xy+4xz)

6.) *Kontrolle mit dem Distributivgesetz:*

2(3xy+4xz)→ 6xy+8xz.

Bestätigung der Umformung im CAS: expand(2(3XY+4XZ))

24 Arbeite die Schritte 3 bis 6 für den gemeinsamen Teiler x durch!

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

25 Arbeite die Schritte 3 bis 6 für den gemeinsamen Teiler 2x durch!

26 Bestimme den größten gemeinsamen Teiler aus 6xy und 8xz! Dokumentiere den Lösungsweg übersichtlich und beschreibe Dein Vorgehen!

27 Kontrolliere Dein Ergebnis aus Auftrag 26, indem Du im ALGEBRA-Menü des FX 2.0 den gcd-Befehl aus dem CALC-Menü ([F2] Taste) benutzt! Dieser bestimmt den größten gemeinsamen Teiler von zwei Termen.
Die Syntax lautet: gcd(6XY, 8XZ).

Die Musterrechnung zu 8 und die Lösungen der Aufträge 24 und 25 zeigen am obigen Summenterm, dass die Umwandlung von einer Summe in ein gleichwertiges Produkt über das Distributivgesetz begründet werden kann. Aber diese Art der Umwandlung ist bislang *nicht eindeutig*. Im ALGEBRA/TRNS-Menü gibt es den Befehl factor, der eine Umwandlung in ein Produkt *eindeutig* liefert. Ein Faktor eines solchen Produktes stellt im Allgemeinen den größten gemeinsamen Teiler aller Summanden dar.

9

a) Gib in das ALGEBRA-Menü den Term 6XY+8XZ ein.
b) Wähle aus dem ALGEBRA/TRNS-Menü den Befehl factor (Position 4) aus.
c) Belege dann den Befehl: factor(Ans) und werte ihn mit der [EXE] Taste aus.

Eingabe: 6XY+8XZ
ALGEBRA/TRNS: factor(Ans) $\xrightarrow{EXE}$ 2(3Y+8Z)X.

Zum Üben und Vertiefen im Arbeitsheft

28 Begründe die Äquivalenz der beiden Terme: 2(3y+8z)x und 2x(3y+8z) ohne Rechner!

29 Die Summe $81x^2yz^3 - 270x^3y^2z + 135xyz^2 - 387xy^4z^3$ ist in ein Produkt zu verwandeln. Dabei soll der größte gemeinsame Teiler aller Summanden einen Faktor bilden. Arbeite zunächst ohne Rechner! Bestätige Dein Ergebnis mit dem FX 2.0!

30 Lars behauptet: „Die beiden Befehle factor und expand aus dem TRNS-Menü sind zwei „Gegenspieler". Was kann Lars damit gemeint haben?

31 Lars behauptet weiterhin, dass der Befehl factor aus dem TRNS-Menü manchmal nicht richtig funktioniert, beispielsweise ergibt factor(12x^3-y^2+3) nach dem Drücken der [EXE] Taste 12x^3-y^2+3. Was meint er diesmal? Halte ihm ein Rechengesetz entgegen!

32 Sabine erhält die Aufgabe aus dem Term $p^2x + q^3y - x^2$ eine Summe in der Form zu gestalten, dass ein Summand ein Produkt darstellt. Kannst Du Sabine weiterhelfen? Formuliere Deinen Lösungsweg im ALGEBRA-Menü und dokumentiere diesen!

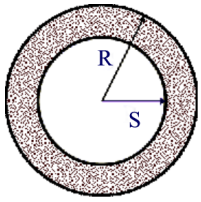
33 Überprüfe mit dem FX 2.0, ob folgende Umformungen richtig sind! Dokumentiere Dein Vorgehen. Korrigiere gegebenenfalls!

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

3.10 Rechnen im RUN MAT- und ALGEBRA-Menü

34 Stelle einen Term zur Berechnung des Flächeninhalts des in Figur 3.39 dargestellten Kreisrings auf! Beginne mit einer verbalen Formulierung! Setze dann fort mit einer symbolischen Notation und schließe mit der Darstellung eines Rechenbaums ab!

Hinweis: Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r wird mit Hilfe des Terms $\pi \cdot r^2$ bestimmt. Dabei ist die Zahl π ein konstanter Dezimalbruch mit unendlich vielen Stellen, ohne Periode. Ein häufig verwendeter Näherungswert ist 3.14.



Figur 3.39

Flächeninhalt des Kreisrings: Flächeninhalt des Kreises mit Radius R vermindert um

Symbole: $\pi \cdot R^2 -$

Rechenbaum:

35 Lege die Definitionsbereiche und Gültigkeitsbereiche für die Parameter R und S fest!

Definitionsbereich für R:

Definitionsbereich für S:

Gültigkeitsbereich für R:

Gültigkeitsbereich für S:

36 **Berechne im RUN-MAT-Menü den Flächeninhalt eines Kreisrings mit Radius R=64.02 mm und S=61.05 mm! Bestimme den gesuchten Näherungswert über die Wertschrankenmethode!**

Näherungswert	Toleranz für das Runden	Untere Wertschranke	Obere Wertschranke	Abschätzung
64.02	±			≤ R ≤
61.05	±			≤ S ≤
3.14	----------			3.141 ≤ π ≤ 3.142

Berechnung der unteren Ergebnisschranke:

Berechnung der oberen Ergebnisschranke:

Abschätzung für den Flächeninhalt des Kreisrings: ≤ A ≤

37 **Stelle die drei Terme $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$, $\pi \cdot (R^2 - S^2)$ und $(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$ als Rechenbäume dar!**

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

38 **Zeige im ALGEBRA-Menü mittels der Befehle expand und simplify, dass die drei Terme $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$, $\pi \cdot (R^2 - S^2)$ und $(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$ äquivalent sind!**

Die Terme $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$ und $\pi \cdot (R^2 - S^2)$ sind äquivalent, denn im ALGEBRA-Menü gilt

Schluss: Alle drei

39 **Zeige im ALGEBRA-Menü mittels des Befehls factor, dass die drei Terme $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$, $\pi \cdot (R^2 - S^2)$ und $(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$ äquivalent sind!**

Die Terme $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$ und $\pi \cdot (R^2 - S^2)$ sind äquivalent, denn im ALGEBRA-Menü gilt

Die Terme $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$ und $(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$ sind äquivalent, denn

Schluss:

⌛ 40 Beweise, dass alle drei Terme aus ⌛ 38 äquivalent sind.

A) Ich zeige, dass die Terme $\pi \cdot (R^2 - S^2)$ und $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$ äquivalent sind.

A	$\pi \cdot (R^2 - S^2)$	
E	$\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$	

B) Ich zeige, dass die Terme $\pi \cdot (R^2 - S^2)$ und $(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$ äquivalent sind.

A	$(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$	
2	$((R+S) \cdot (R-S)) \cdot \pi$	Assoziativgesetz der Multiplikation
3	$((R+S) \cdot R + (R+S) \cdot (-S)) \cdot \pi$	
4		
5		
6		
E	$\pi \cdot (R^2 - S^2)$	

C) Ich zeige, dass dann auch die Terme $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$ und

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Vorbereitung am Rechner: SET-UP/Display:Norm1

⌛ 41 Bestätige mittels Listenrechnung die Äquivalenz aller drei Terme aus ⌛ 38! Benutze für die Definition aller Listen das RUN-MAT-Menü und für die Listenpräsentation das STAT-Menü! Dokumentiere alle wichtigen Überlegungen!

Für den Parameter R denke ich mir folgende Liste aus.

Gültigkeitsbereich R:

{10, 15.764, 278.12, 1000} → List 1 ; { } → List 2

R in mm	S in mm	$\pi \cdot R^2 - \pi S^2$ in	$\pi \cdot (R^2 - S^2)$ in	$(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$ in
List 1	List 2	List 3	List 4	List 5
10				
15.764				
278.12				
1000				

Auswertung:

⌛ 42 **Bestätige im ALGEBRA-Menü mittels der Befehle substitute und approx die Äquivalenz aller drei Terme aus ⌛ 38! Benutze die gleichen Elemente wie in den Listen 1 und 2 aus ⌛ 41 ! Dokumentiere alle wichtigen Überlegungen!**

substitute($\pi \cdot R^2 - \pi S^2$, R=10, S=) →

approx Ans →

substitute($\pi \cdot (R^2 - S^2)$, R=10, S=) →

approx Ans →

substitute$(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$, R=10, S=) →

approx Ans →

substitute

approx Ans →

substitute

approx Ans →

substitute

approx Ans →

substitute

approx Ans →

substitute

approx Ans →

substitute

approx Ans →

substitute

approx Ans →

substitute

approx Ans →

substitute

approx Ans →

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Auswertung :

⌛ **43** **Definiere im RUN MAT-Menü die Listen 1 und 2 wie folgt neu:**

{13355889978, 99887755568, 1.23456789E-03} → List 1

{13355889975, 99887755565, 1.23456786E-03} → List 2

Nimm mittels Listenrechnung Stellung zu der Aussage: Die drei Terme aus ⌛ 38 sind äquivalent zueinander!

⌛ **44** **Bestätige im ALGEBRA-Menü mittels des kombinierten Befehls simplify(substitute die Äquivalenz aller drei Terme aus ⌛ 38! Benutze die gleichen Elemente wie in den Listen 1 und 2 aus ⌛ 43 ! Dokumentiere alle wichtigen Überlegungen!**

simplify(substitute($\pi \cdot R^2 - \pi S^2$, R=13355889978, S=13355889975)

80135339859π

simplify(substitute($\pi \cdot (R^2 - S^2)$, R=13355889978, S=13355889975)

80135339859π

simplify(substitute((R+S)·(R-S)·π, R=13355889978, S=13355889975)

---

simplify(substitute($\pi \cdot R^2 - \pi S^2$, R=

simplify(substitute($\pi \cdot (R^2 - S^2)$, R=

simplify(substitute((R+S)·(R-S)·π, R=

---

simplify(substitute($\pi \cdot R^2 - \pi S^2$, R=

simplify(substitute(π·(R²-S²), R=

simplify(substitute((R+S)·(R-S)·π, R=

⌛ **45** **Studiere noch einmal alle Ergebnisse von ⌛ 37 bis ⌛ 44 und nimm abschließend Stellung zu der Äquivalenz der drei Terme**
$\pi \cdot R^2 - \pi \cdot S^2$, $\pi \cdot (R^2 - S^2)$ **und** $(R+S) \cdot (R-S) \cdot \pi$ **!**

3.11 Der kritische Umgang mit dem FX 2.0

Wiederholen und Üben

⌛ **46** **Wiederhole mündlich alle grundlegenden Rechengesetze der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen!**

Notiere, welche gemeinsame Formulierung alle diese Gesetze aufweisen!

Alle grundlegenden Rechengesetze haben die Textpassage:

gemeinsam.

Vorbereitung am Rechner: SET-UP/Display:Sci9

⌛ **47** **Stelle im RUN-MAT-Menü fest, welche kleinste und größte Zahl noch dargestellt werden kann! Verwende auch das Handbuch zum FX 2.0!**

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

⌛ **48** Stelle im ALGEBRA-Menü (CAS-Menü) fest, welche kleinste und größte Zahl noch dargestellt werden kann! Verwende auch das Handbuch zum FX 2.0! Benutze nicht den approx-Befehl!

Vorbereitung am Rechner: SET-UP/Display:Norm1

⌛ **49** Berechne im RUN-MAT-Menü und dokumentiere:
a) 8888888888+0.03 b) 1234567890+0.08 c) 9512357852-0.04

Welcher grundlegende Konflikt zu den Rechengesetzen bahnt sich hier an?

Zum Üben und Vertiefen im Arbeitsheft

⌛ **50** Berechne im ALGEBRA-Menü (CAS-Menü) und dokumentiere:
a) 8888888888+0.03 b) 1234567890+0.08 c) 9512357852-0.04

Erkläre die Ergebnisse durch ausführliche Handrechnung!

Die grundlegenden Rechengesetze gelten für rationale Zahlen. In allen Gesetzesformulierungen tritt an diversen Textstellen die Passage auf: „für alle rationalen Zahlen...“. Im RUN-MAT-Menü und im STAT-Menü finden wir keine rationalen Zahlen, sondern so genannte Maschinenzahlen. Maschinenzahlen können im Unterschied zu den rationale Zahlen generell nur über eine feste Anzahl von Dezimalstellen dargestellt werden. Die Menge aller Maschinenzahlen stellt somit eine echte Teilmenge der Menge aller rationalen Zahlen dar. Die größte Maschinenzahl, die derzeit im RUN-MAT-Menü noch dargestellt werden kann ist 9.99999999E+99, die kleinste ist -9.99999999E+99. Das bedeutet zum Beispiel, dass die rationale Zahl 9.99999999E+100 nicht mehr in der Menge der „FX 2.0-Maschinenzahlen“ enthalten ist, was nicht gleich bedeutend ist, dass sie nicht mit dem FX 2.0 dargestellt werden kann, denn im ALGEBRA-Menü wird die Eingabe 9.99999999*10^100 nach Drücken der EXE Taste mit $\frac{999999999}{100000000}\cdot 10^{100}$ beantwortet.

Zahldarstellung im FX 2.0

Nur im ALGEBRA- und CAS-Menü können rationale (reelle) Zahlen in Form von Brüchen dargestellt werden. In allen anderen Menüs kann nur mit Maschinenzahlen gerechnet werden. Mittels approx-Befehl können in guter Näherung die Brüche in Maschinenzahlen umgewandelt werden. Wie genau diese Umwandlung erfolgen kann, hängt maßgeblich von der Einstellung SET-UP/Display ab.

Zum Üben und Vertiefen im Arbeitsheft

51 Zeige im ALGEBRA-Menü die Allgemeingültigkeit nachfolgender Rechengesetze:

a) Für alle rationalen Zahlen a, b, c: $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$

b) Für alle rationalen Zahlen a, b: $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Dokumentiere die Beweisdarstellung mit verschiedenen ALGEBRA-Befehlen.

10 Erzeuge im RUN-MAT-Menü Wahrheitswerte zu folgenden Aussagen:

a) a+b=b+a für a=10 und b= 30

b) a-b=-b+a für a=3/4 und b= 7.85 !

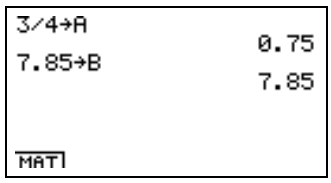
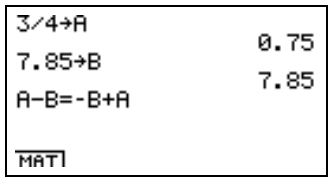
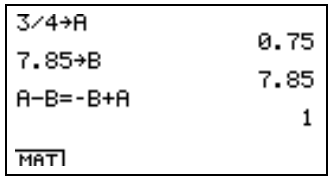
Zu a) a+b=b+a für a=10 und b= 3

Handlung im RUN-MAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Löschen des Bildschirms und erste Wertzuweisung mit Hilfe des Speicherpfeils	AC/ON 10 → A EXE 30 → B EXE	10→A 30→B 10 30 MAT Figur 3.40
- Eingabe der ersten Gleichung	A + B SHIFT . B + A	10→A 30→B A+B=B+A 10 30 MAT Figur 3.41
- Ermitteln des ersten Wahrheitswertes - Es gilt folgende Zuordnung Wahr: 1 Falsch: 0	EXE	10→A 30→B A+B=B+A 10 30 1 MAT Figur 3.42

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

Die Aussage a+b=b+a für a=10 und b= 30 ist im RUN-MAT-Menü wahr.

Zu b) a-b=-b+a für a=3/4 und b= 7.85

Handlung im RUN-MAT-Menü	Tastenfolge	Anzeige
- Löschen des Bildschirms und zweite Wertzuweisung mit Hilfe des Speicherpfeils	AC/ON 3 / 4 → A EXE 7.85 → B EXE	 Figur 3.43
- Eingabe der zweiten Gleichung	A - B SHIFT . (-) B + A	 Figur 3.44
- Ermitteln des zweiten Wahrheitswertes - Es gilt folgende Zuordnung Wahr: 1 Falsch: 0	EXE	 Figur 3.45

Schuss: Die Aussage a-b=-b+a für a=3/4 und b= 7.85 ist im RUN-MAT-Menü wahr.

⌛ 52 Erzeuge im RUN-MAT-Menü den Wahrheitswert der Aussage:
x-y=y-x für x=-499 und y=601 !

⌛ 53 Zeige im RUN-MAT-Menü die Ungültigkeit jener Rechengesetze, die in ⌛ 51 präsentiert wurden!

Für das Gesetz in ⌛ 51 a) belege a mit 99999995, b mit 3.0000002 und c mit 3.0000001.

Für das Gesetz in ⌛ 51 b) belege a mit 7.0000005, b mit 7.0000006.

Rechengesetze und der FX 2.0

Nur im ALGEBRA- und CAS-Menü gelten die Rechengesetze für rationale Zahlen. In allen anderen Menüs gelten die Rechengesetze für rationale Zahlen nicht. Trotzdem kann im Allgemeinen im RUN-MAT- und STAT-Menü mit Hilfe der Maschinenzahlen sinnvoll gerechnet werden. Abweichungen zu den Rechengesetzen treten nur bei besonderen Maschinenzahlen auf, zum Beispiel bei sehr großen Zahlen, die sich geringfügig voneinander unterscheiden.

3.12 Terme in Beweisen

Wir wissen bereits: Alle Sätze in der Mathematik sind bewiesene Aussagen. In den allermeisten Fällen handelt es sich um Allaussagen. Diese beginnen dann zum Beispiel so: „Für alle rationale Zahlen…"; „Jedes gleichschenklige Dreieck…", „In einem beliebigen Rechteck…".

Wir wollen zur Demonstration folgenden *Satz beweisen*:

<u>Satz:</u> Die Summe von drei beliebigen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Wir suchen im Text des zu beweisenden Satzes *gezielt* nach bestimmten *Textbausteinen, die dann auch von uns zitiert werden*:

a) *Textbausteine, die Hinweise auf die betreffenden Objekte geben.*
(„drei beliebigen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen", „Bruchzahlen", „Geraden", „Winkel", „Vierecke", „Würfel",...).

b) *Textbausteine, die Hinweise auf Operationen geben.*
(„Summe", „Differenz", „größten gemeinsamen Teiler", „vermehren", „verdoppeln", „Senkrechte errichten", „Parallelverschiebung",...).

c) *Textbausteine, die Hinweise auf Relationen geben.*
(„durch 3 teilbar", „kleiner als", „parallel", „proportional", „quadratisch", „senkrecht",...).

1. Stufe: Textarbeit und Strukturieren

Objekte:	*...drei beliebigen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen...*
Operationen:	*Summe von*
Relationen:	*durch 3 teilbar*

2. Stufe: Konkretisieren und erstes Testen

Objekte:	*...drei beliebigen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen...*	a) 5, 6, 7 b) 45, 46, 47 c) 99, 100, 101
Operationen:	*Summe von*	a) 5+6+7 → 18 b) 45+46+47 → 138 c) 99+100+101→ 300

Relationen:	*durch 3 teilbar*	a) 3|18 w.A., denn 3*6=18 b) 3|138 w.A. , denn 3*46=18 c) 3|300 w.A. , denn 3*100=18

3. Stufe: Sortieren nach Voraussetzung und Behauptung

Wenn a, b und c drei beliebige aufeinander folgende natürliche Zahlen sind, *dann* ist die Summe von a, b und c durch 3 teilbar.

Voraussetzung: a, b und c sind drei beliebige aufeinander folgende natürliche Zahlen
Behauptung: Summe von a, b und c durch 3 teilbar

4. Stufe: Skizzieren einer Beweisidee - vorerst mit einer ausgedachten Zahl

1. Schritt: *Ich denke mir eine natürliche Zahl aus*, beispielsweise die Zahl 237. *Ich speichere sie unter dem Namen A ab.*

Tastenfolge: (RUN-MAT-Menü)	[AC/ON] 237 [→] A [EXE]
Eingabezeile:	237 → A
Ausgabezeile:	237

2. Schritt: *Ich berechne den Nachfolger von A*, d.h. ich suche die auf 237 folgende Zahl.

Tastenfolge: (RUN-MAT-Menü)	A [+] 1 [EXE]
Eingabezeile:	A+1
Ausgabezeile:	238

3. Schritt: *Ich speichere das letzte Ergebnis unter dem Namen B ab.*

Tastenfolge: (RUN-MAT-Menü)	[→] B [EXE]
Eingabezeile:	Ans → B
Ausgabezeile:	238

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

4. Schritt: *Ich berechne den Nachfolger von B*, d.h. ich suche die auf 238 folgende Zahl.

Tastenfolge: (RUN-MAT-Menü)	B [+] 1 [EXE]
Eingabezeile:	B+1
Ausgabezeile:	239

5. Schritt: *Ich speichere das letzte Ergebnis unter dem Namen C ab.*

Tastenfolge: (RUN-MAT-Menü)	[→] C [EXE]
Eingabezeile:	Ans → C
Ausgabezeile:	239

6. Schritt: *Ich berechne die Summe von A, B und C*, denn in unserem zu beweisenden Satz steht: „die Summe von a, b und c durch 3 teilbar".

Tastenfolge: (RUN-MAT-Menü)	A [+] B [+] C [EXE]
Eingabezeile:	A+B+C
Ausgabezeile:	714

7. Schritt: *Ich speichere das letzte Ergebnis unter dem Namen D ab.*

Tastenfolge: (RUN-MAT-Menü)	[→] D [EXE]
Eingabezeile:	Ans → D
Ausgabezeile:	714

8. Schritt: *Ich dividiere D durch 3 und prüfe, ob eine natürliche Zahl herauskommt.* Erhalte ich eine natürliche Zahl, dann weiß ich, dass die Summe aus A, B und C durch 3 teilbar ist. Kommt hingegen keine natürliche Zahl heraus, dann handelt es um eine Divisionsaufgabe mit Rest. In einem solchen Fall wäre die Summe A+B+C nicht durch 3 teilbar.

Tastenfolge: (RUN-MAT-Menü)	D [/] 3 [EXE]
Eingabezeile:	D/3

Ausgabezeile:	238

Schluss: *238 ist eine natürliche Zahl, also ist die Summe durch 3 teilbar. Damit ist der obige Satz speziell für die 3 aufeinander folgenden Zahlen 237, 238 und 239 bestätigt.*

Zum Üben und Vertiefen im Arbeitsheft

⧖ 54 Denke Dir selbst eine natürliche Zahl aus (verschieden von 237) und durchlaufe die Schritte 1 bis 8 der Beweisskizze! Benutze Deinen FX 2.0 im CAS-Menü!

5. Stufe: Aufschreiben des allgemein gültigen Beweises unter Zuhilfenahme des CAS-Menüs

Vorbereitungen am Rechner: Initialisiere das CAS-Menü!

1. Schritt: *Ich denke mir eine natürliche Zahl aus*, diesmal keine spezielle, sondern den *freien Platzhalter* X, *der jede natürliche Zahl repräsentieren soll.*

Tastenfolge: (CAS-Menü)	[AC/ON] X [→] A [EXE]
Eingabezeile:	X → A
Ausgabezeile:	X

2. Schritt: *Ich berechne den Nachfolger von A*, d.h. ich suche die auf X folgende Zahl.

Tastenfolge: (CAS-Menü)	A [+] 1 [EXE]
Eingabezeile:	A+1
Ausgabezeile:	X+1

3. Schritt: *Ich speichere das letzte Ergebnis unter dem Namen B ab.*

Tastenfolge: (CAS-Menü)	[→] B [EXE]
Eingabezeile:	Ans → B
Ausgabezeile:	X+1

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland

4. Schritt: *Ich berechne den Nachfolger von B*, d.h. ich suche die auf X+1 folgende Zahl.

Tastenfolge: (CAS-Menü)	B [+] 1 [EXE]
Eingabezeile:	B+1
Ausgabezeile:	X+2

5. Schritt: *Ich speichere das letzte Ergebnis unter dem Namen C ab.*

Tastenfolge: (CAS-Menü)	[→] C [EXE]
Eingabezeile:	Ans → C
Ausgabezeile:	X+2

6. Schritt: *Ich berechne die Summe von A, B und C*, denn in unserem zu beweisenden Satz steht: „...die Summe von a, b und c durch 3 teilbar".

Tastenfolge: (CAS-Menü)	A [+] B [+] C [EXE]
Eingabezeile:	A+B+C
Ausgabezeile:	3X+3

7. Schritt: *Ich speichere das letzte Ergebnis unter dem Namen D ab.*

Tastenfolge: (CAS-Menü)	[→] D [EXE]
Eingabezeile:	Ans → D
Ausgabezeile:	3X+3

8. Schritt: *Ich dividiere D durch 3 und prüfe, ob eine natürliche Zahl herauskommt.* Erhalte ich eine natürliche Zahl, dann weiß ich, dass die Summe aus A, B und C durch 3 teilbar ist. Kommt hingegen keine natürliche Zahl heraus, dann handelt es sich um eine Divisionsaufgabe mit Rest. In einem solchen Fall wäre die Summe A+B+C nicht durch 3 teilbar.

Tastenfolge: (CAS-Menü)	D [/] 3 [EXE]
Eingabezeile:	D/3

Ausgabezeile:	$\frac{3X+3}{3}$

Um festzustellen, ob der letzte Term eine natürliche Zahl darstellt, oder nicht, wende ich den simplify-Befehl aus dem TRNS-Menü an.

Tastenfolge: (CAS-Menü)	simplify(D [/] 3) [EXE]
Eingabezeile:	simplify(D [/] 3)
Ausgabezeile:	X+1

Schluss: X+1 ist dann eine natürliche Zahl, wenn für X selbst nur natürliche Zahlen eingesetzt werden.

Genau das wurde oben mit der Passage:

„Ich denke mir eine natürliche Zahl aus, diesmal keine spezielle, sondern den freien Platzhalter X, der jede natürliche Zahl repräsentieren soll."

vereinbart.

Die Summe A+B+C ist durch 3 teilbar. Damit ist der obige Satz allgemein für die 3 aufeinander folgenden Zahlen X, X+1 und X+2 bewiesen.

Kurznotiz:

$$\textit{Für alle } x \in \mathbb{N}:$$

$$x+(x+1)+(x+2) \xrightarrow{\textit{Assoz.+ und Zusammenfassung}} 3x+3;$$

$$\frac{3x+3}{3} \xrightarrow{\textit{Division von Brüchen}} (3x+3)\cdot\frac{1}{3} \xrightarrow{\textit{Distributivgesetz}} x+1;$$

$$x+1 \in \mathbb{N} \quad \textit{w.z.b.w.}.$$

Zum Üben und Vertiefen im Arbeitsheft

55 Beweise, dass die Summe dreier ungerader Zahlen stets ungerade ist!

56 Beweise: Wenn von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist, dann ist das Produkt dieser Zahlen durch 4 teilbar.

 © CASIO Computer Co. GmbH Deutschland