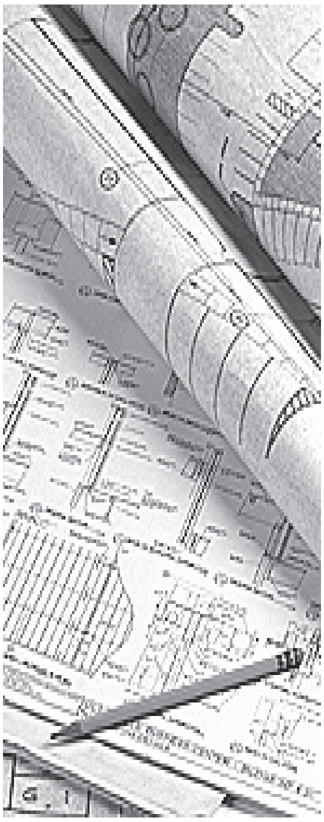
... computerunterstützter Mathematikunterricht

Frank Schumann

Wie finde ich bloß die Gleichung ?

Heuristische Wege zum Lösen einfacher Text- und Sachaufgaben unter Einbeziehung von Computeralgebra



$$2 \cdot x + 10 \cdot (x + 5) = 3 \cdot x - 10$$

SOLVE$(2 \cdot x + 10 \cdot (x + 5) = 3 \cdot x - 10, x)$

$$\left[x = -\frac{20}{3} \right]$$

$$2 \cdot x + 10 \cdot (x + 10) = 3 \cdot x - 5$$

SOLVE$(2 \cdot x + 10 \cdot (x + 10) = 3 \cdot x - 5, x)$

$$\left[x = -\frac{35}{3} \right]$$

$$[x = -11.6666]$$

$$2 \cdot x + 5 \cdot (x + 10) = 3 \cdot x - 5$$

SOLVE$(2 \cdot x + 5 \cdot (x + 10) = 3 \cdot x - 5, x)$

Lehrerhandreichung mit vielen Beispielen

schumann´s verlags

Math-College® Dokumente

Math-College® Dokumente / Wie finde ich bloß die Gleichung?

Für den Inhalt verantwortlich:

Wie finde ich bloß die Gleichung? **Frank Schumann**

Kontaktadresse des Autors:
Frank Schumann
c/o Math-College
Goseriede 10/12
D - 30159 Hannover
eMail: Frank.Schumann@math-college.de

1. Auflage, März 2000

Layout und Umschlaggestaltung: Jens Carl, Hannover, Deutschland
Druck und Bindung: schumann´s verlagshaus Hannover, Deutschland

Inhaltsverzeichnis

Wie finde ich bloß die Gleichung ?
Heuristische Wege zum Lösen einfacher Text- und Sachaufgaben unter Einbeziehung von Computeralgebra

Einleitung

“Bitte nehmen Sie bloß keine Textaufgaben dran, alles andere, nur nicht die … .”

(Schüler einer 8. Klasse)

Kommt Ihnen, liebe Kolleginnen und Kollegen, dieses Flehen nicht bekannt vor?

Mit diesem Zitat eines Schülers aus einer 8. Klasse eines Hannoveraner Gymnasiums wird ein altes, weit verbreitetes Problem des Mathematikunterrichts angerissen, nämlich die Schwierigkeit von Schülerinnen und Schülern mit dem Lösen von Textaufgaben sinnvoll umgehen zu können und auch die Schwierigkeit vieler Kolleginnen und Kollegen den Löseprozess von Textaufgaben zielgerichtet so zu steuern, dass der Prozess als selbstständige Schülerhandlung ausgebildet wird. Dieses Problem ist brisant, zumal sich in den letzten Jahren, beispielsweise auf MNU-Veranstaltungen, immer mehr ein Streitthema über die Schaffung einer neuen Aufgabenkultur herauskristallisiert hat, das maßgeblich von der Diskussion um einen sinnvollen Einsatz Neuer Technologien im Mathematikunterricht geprägt wird.

Wenn man sich als Autor diesem Thema theoretisch nähert und hierzu diverse Fachliteratur zu Rate zieht, findet man sich schnell in einem Dschungel von Fachbegriffen und Fachmeinungen wieder, die den praktisch tätigen Lehrer in Verwirrung bringen kann. Aus dem Terminologien-Wirrwarr seien einige nur genannt: *praktische Anwendungsaufgaben*, *konstruierte Textaufgaben* (zum Teil auch als *eingekleidete Textaufgaben mit Sachbezug* bezeichnet) und *offene Sachaufgaben* mit der Forderung *mathematische Modelle* zu schaffen. Selbstverständlich werden damit verschiedene Begriffsklassen angesprochen (neue kommen jährlich hinzu). Wenn wir weiter die Unsitte betreiben, neue Begriffe einzuführen, ohne sie in bestehende Begriffsklassen einzuordnen und ohne ihren Verwendungszweck festzulegen, dann wird es noch eine Weile dauern, bis unsere Schüler auf dem Gebiet der Textaufgaben ihre Selbstständigkeit erwerben und erkennen. Oder ketzerischer formuliert: Der “einfachste” Weg wäre natürlich diese Art von Aufgaben aus den Plänen und Richtlinien wieder zu streichen, wie wir es in der Vergangenheit mit anderen Themen und Lernbereichen zu Genüge getan haben. Diesmal jedoch scheint dem Streichen eine zweite, neue Kraft entgegenzuwirken, nämlich die immer stärker werdende Forderung, den Einsatz Neuer Technologien im Mathematikunterricht publik zu machen.

Mit diesem Buch, geschrieben für Mathematikerlehrerinnen und Mathematiklehrer, möchten wir an Hand diverser Beispiele für Textaufgaben demonstrieren, wie Schülerinnen und Schüler allmählich zum Aufstellen beschreibender Relationen befähigt werden können. Parallel zu diesem titulierten Ziel ist uns das Testen fiktiver Lösungen und die Probe am Text besonders wichtig, denn gerade die geistige Durchdringung der Verbindung *Text und Symbolik* entscheiden darüber, inwieweit Schülerinnen und Schüler die notwendige Selbstständigkeit beim erfolgreichen Bearbeiten (nicht nur Lösungen produzieren) von Textaufgaben erlangen können.

Die Textaufgaben entsprechen der Art, wie wir sie in vielen aktuellen Schullehrbüchern und entsprechenden Aufgabensammlungen wieder finden können. In diesem Zusammenhang vermitteln wir weniger rezeptartige Schrittfolgen als vielmehr Schrittfolgen, die bei häufigem Einsatz zu einer allmählichen Herausbildung wichtiger mathematischer Denk- und Handlungsschemata führen werden. Dabei soll deutlich werden, dass ein am Lösungsweg orientierter Prozess für uns einen weitaus höheren didaktischen Stellenwert hat, als ein rein lösungsproduktiver.

Wenn unsere Leserinnen und Leser möglicherweise Aufgaben suchen, welche offener und realitätsnaher sind, als die in diesem Heft beschriebenen, dann empfehlen wir das Buch „Math-College Dokumente / Zuordnungen nach Programm“ [3] aus dem schumann´s verlagshaus Hannover.

Der hier beabsichtigte Einsatz von Computeralgebra setzt kein spezielles Computeralgebrasystem (CAS) voraus. Wenn gleich unsere Darstellungen auf DERIVE 4.11 für Windows zugeschnitten sind, so lassen sich alle im Buch angesprochenen Computeranwendungen vom Benutzer an andere CAS, wie zum Beispiel Maple, Mathematica, MuPAD, LiveMath, TI-92, TI-92 Plus, TI-89 oder Algebra FX 2.0 usw. problemlos anpassen.

Wir hoffen mit dieser Lehrerhandreichung eine praktische Unterstützung für die Arbeit an geschlossenen Textaufgaben geben zu können und würden uns freuen, wenn Sie uns Ihre konstruktiven Kritiken oder auch Verbesserungsvorschläge mitteilen würden.

Hannover, Januar 2000

Frank Schumann

1 „Die Gleichungen sind das A und O in der Mathematik"

>> Eine mögliche Situation aus dem Schulalltag könnte so aussehen <<

Der Lehrer stellt die Hausaufgabe:
Löse durch das Aufsuchen geeigneter Gleichungen folgende Textaufgaben! Schreibe alle wichtigen Überlegungen und Zwischenschritte sorgfältig auf!

1. Jeder Band eines mehrbändigen Lexikons ist 5,5 cm breit. Der zugehörige Atlas ist 7 cm breit. Wie viele Bände passen zusammen mit dem Atlas höchstens auf einen 90 cm breiten Regalboden? [1]

2. Lars spart auf ein neues Sportrad mit allen Schikanen. 779 DM kostet sein Traum. 291 DM hat er schon auf seinem Sparbuch. Die Großeltern wollen zum nächsten Geburtstag 200 DM spendieren. Den Rest des Kaufpreises will Lars sich erarbeiten. Mit Taschengeld, Wagenwaschen, Rasenmähen, usw. kann er wöchentlich höchstens 18 DM verdienen. Wie viele Wochen muss er mindestens noch auf sein Traumrad warten? [1]

3. Eine Familie kauft ein Auto für 31670 DM. Allein die Extras kosten ein Viertel des Grundpreises. Die Überführung ist mit 420 DM im Kaufpreis enthalten. Wie teuer waren die Extras? [1]

Christian ist sich seiner Sache sicher und meldet sich nach einer kurzen Aufforderung des Lehrers, um seine Lösungen zur Hausaufgabe an der Tafel zu präsentieren.

Zu 1) Ohne den Atlas haben die Bände im Regal auf einer Restbreite von 83 cm Platz. Da jeder Band die gleiche Breite von 5,5 cm hat, passen (TR: 83:5.5=15.090909) höchstens *15 Bände* in das Regal.

Zu 2) Das Traumfahrrad kostet 779 DM. 291 DM hat Lars auf dem Sparbuch. Mit der Spende der Großeltern von 200 DM bleibt ein Rest von (TR: 779-291-200=288) 288 DM. Wenn Lars pro Woche höchstens 18 DM verdienen kann, dann muss er mindestens (TR: 288:18=16) *16 Wochen* auf sein Traumfahrrad warten.

Zu 3) Das Auto kostet 31670 DM. Ohne die Überführungskosten von 420 DM würde das Auto nur noch (TR: 31670-420=31250) 31250 DM kosten. Dieser Restbetrag bildet den Grundpreis. ¼ von 31250 DM sind *7812,50 DM.* So viel kosten also die Extras.

Ein mulmiges Gefühl stellt sich bei Christian ein, nachdem er mit der Präsentation fertig wurde. Sein Vater half ihm nämlich und sagte noch zu ihm:

"Wozu denn noch Gleichungen?"

Der Lehrer handelt bei der Besprechung der Hausaufgabe pädagogisch klug und lobt Christian für seine dargebotenen Lösungen. Wenn auch seine Erwartung in Sachen Aufstellen einer Gleichung nicht erfüllt wurden, so sucht er bei diesem Schüler einen neuen Ansatz zur Einsichtnahme, indem er ihn auffordert, gemeinsam mit ihm einen Fehler in der Lösung zur dritten Aufgabe aufzudecken.

Lehrer: "Christian, ich sehe du hast dich mit den Aufgaben intensiv auseinander gesetzt und hast auch richtige Lösungen gefunden, doch in der dritten Aufgabe hast du etwas Wichtiges übersehen. Lass uns gemeinsam den Fehler suchen. Ich helfe dir dabei. Christian, woraus setzt sich deiner Meinung nach der Kaufpreis für das Auto zusammen?"

Christian: „Aus dem Grundpreis, den Preis für alle Extras und den 420,00 DM, Überführungskosten."

Lehrer: „Wenn das so ist, dann berechne noch einmal von Neuem den Kaufpreis, der sich diesmal aus deinen errechneten Werten ergibt!"

Christian sieht in seine Aufzeichnungen und rechnet an der Tafel ganz aufgeregt:

Grundpreis + Extras + 420
31250 + 7812,50 + 420 = 39482,5

Lehrer freut sich und spricht: „Fällt dir jetzt etwas auf?"

Christian: „Ja, der Kaufpreis ist viel höher als der, der im Buch angegeben ist."

Lehrer: „Prima! Siehst du jetzt die falsche Gleichung."

Christian: „Nee. Was denn für eine falsche Gleichung?"

Das Gespräch wurde an dieser Stelle unterbrochen, denn es klingelte zur Pause.

Wir werden diesen letzten Gedanken später erneut aufgreifen.

2 "Aller Anfang ist schwer"

Unsere langjährigen Erfahrungen mit Schülerinnen und Schülern zeigen immer wieder, dass irgendwelche dargebotenen Schrittfolgen unreflektiert als Rezepte zur Lösung diverser Problemklassen verstanden werden und meistens nur unter diesem Gesichtspunkt entweder als brauchbar oder nicht brauchbar eingestuft werden. Dieses Verdachtsmoment wird aber gerade auch durch Schullehrbücher auf Grund ihrer methoden- oder zweckfreien Darstellung verstärkt. Das folgende, zitierte Beispiel beginnt mit einer solchen Schrittfolge, die eher darlegt, wie der Lösungsweg im einzelnen zu dokumentieren ist und sich weniger auf das Leiten (besser noch Einleiten) wichtiger Denkprozesse richtet. Ein Rezept ist es jedenfalls nicht.

>> Viele Probleme der Mathematik und des Alltags lassen sich mit Hilfe von Gleichungen lösen. Dazu muss die jeweilige Situation zunächst in die 'Sprache' der Mathematik übersetzt werden.

Beim Lösen von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Gleichungen gehen wir folgendermaßen vor:

1. Schritt: Einführen einer Variablen x für eine noch unbekannte Größe.
2. Schritt: Mittels x Aufstellen von Termen für Größen, die übereinstimmen sollen.
3. Schritt: Aufstellen einer Gleichung.
4. Schritt: Lösen der Gleichung.
5. Schritt: Formulieren des Ergebnisses.

Aufgabe Nr. 1 (Adventskalender)**:**

Beate bastelt ihrer Freundin einen Adventskalender aus 24 kleinen Päckchen. Darin möchte sie insgesamt 30 DM in 1-DM- und 2-DM-Stücken einpacken. Wie viele 1-DM- und wie viele 2-DM-Stücke braucht sie? [2] <<

Eine Schülerüberlegung (Klasse 8, Durchschnittsnote 3) sieht so aus:

1 DM					
					2 DM

3 DM ausgegeben

Rest 27 DM

1 DM	1 DM				
				2 DM	2 DM

6 DM ausgegeben

Rest 24 DM

...und immer so weiter ... bis:

1 DM	1 DM	1 DM	1 DM	1 DM	1 DM
1 DM	1 DM	1 DM	1 DM	x	x
x	x	2 DM	2 DM	2 DM	2 DM
2 DM	2 DM	2 DM	2 DM	2 DM	2 DM

30 DM ausgegeben

Rest 0 DM

Antwortsatz: “Das muss irgendwie noch anders gehen. Auf jeden Fall braucht Beate mehr von den 1-DM-Stücken und weniger von den 2-DM-Stücken”

3 Ein experimenteller Ansatz

Was Schülerinnen und Schüler an Fähigkeiten wirklich besitzen und an Ideen in den heuristischen Löseprozess einbringen könnten, bleibt uns Lehrern oftmals verborgen, weil wir meist ungewollt oder auch gewollt Bremser im Nacken haben bzw. auch bewusst setzen müssen, nämlich die Zeit und den Lehrplan. Alles verständlich und auch praktisch nicht weg zu diskutieren. Doch gerade jene Schüler-Ideen-Phasen, die vom üblichen Weg abweichen und in ihrer Ausführung die Lösung der Aufgabe nicht so richtig erkennen lassen, sind für das Hervorbringen kreativer Leistungen äußerst notwendig (Anm.: Kreatives Tun heißt nicht automatisch Erfolg zu haben). Ein Vorschlag unsererseits: Errichten wir bewusst in der Stoff-Zeit-Planung, anknüpfend an jene Lernbereiche, in denen Rezepte nicht vorhanden sind und auch versagen müssen, gezielt Inseln oder Zeitkonten für Brainstorming-Phasen, ohne Lösungen zu präsentieren. Dabei wird der Erfolg solcher Phasen durch ihre Qualität bestimmt, d. h. wie klar Ideen formuliert werden und wie deutlich sich der Lösungsweg abzeichnet.

Gehen wir mit unseren Gedanken noch einmal zurück zu der Adventskalender-Aufgabe und insbesondere zu dem Schüler-Antwortsatz:

“Das muss irgendwie noch anders gehen. Auf jeden Fall braucht Beate mehr von den 1-DM-Stücken und weniger von den 2-DM-Stücken”

Betrachten wir für einen experimentellen Ansatz die folgenden 4 Größen mit ihren zugeordneten Variablennamen:

Größen	**Variablennamen**
Anzahl der verpackten 1-DM-Stücke	DM_1
Anzahl der verpackten 2-DM-Stücke	DM_2
Anzahl der freien Plätze auf dem Kalender	FREI
Gesamtausgabe in DM	GA

als auch die Versuchszahl $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*$ und verfolgen die Entwicklungstendenz dieser 4 Größen (die Zeichen neben den Variablennamen geben das Monotonieverhalten wieder).

n	**DM_1 (↑)**	**DM_2 (↓)**	**FREI (↓)**	**GA (const)**
1	10	10	4	30
2	12	9	3	30
3	14	8	2	30
4	16	7	1	30
5	18	6	0	30
6	20	5	-1	30

Die Lösung wird so präsent: Beate muss von den 1DM-Stücken 18 und von den 2-DM-Stücken 6 in den Adventskalender einpacken.

Und die zugehörige Gleichung?

(... mehr als nur eine ketzerische oder überflüssige Frage.)

Jede Spalte stellt im Sinne eines CAS eine **Liste** dar.

In DERIVE können wir die Variablennamen aus dem Tabellenkopf als Listennamen verwenden und definieren so (siehe Figur 3.1):

```
#3:  n := [1, 2, ..., 6]
#4:  DM_1 := [10, 12, ..., 20]
#5:  DM_2 := [10, 9, ..., 5]
#6:  FREI := [4, 3, ..., -1]
#7:  GA := [30, 30, 30, 30, 30, 30]
```

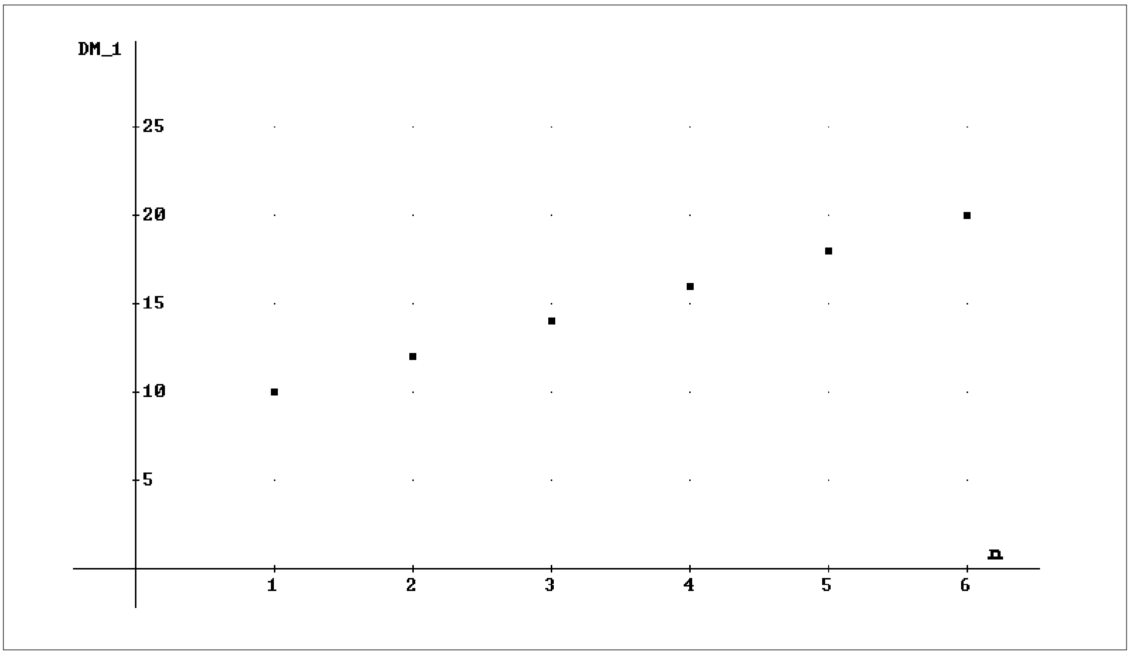
Figur 3.1

Aus den definierten Listen können für weitere Auswertungen auch Tabellen im Zwei-Spalten-Format erzeugt werden (siehe Figur 3.2). Dadurch werden einfache funktionale Zusammenhänge in Abhängigkeit der Versuchszahl **n** deutlich, wovon sich die Schüler durch den Befehl **Vereinfache** sehr schnell überzeugen können.

```
#9:  TAB1 := [n, DM_1]`
#10: TAB2 := [n, DM_2]`
#11: TAB3 := [n, FREI]`
#12: TAB4 := [n, GA]`
```

Figur 3.2

Durch das Zwei-Spalten-Format kann jede dieser Tabellen nach vorherigem Betätigen des Befehls **Vereinfache** auch grafisch dargestellt werden. Es entstehen diskrete Grafen in linearer Abhängigkeit von **n** (siehe Figur 3.3). Die Achsenbezeichnungen werden im Grafikfenster nachträglich von den Schülern vorgenommen. Zum Beispiel für **TAB1**:



Figur 3.3

Durch Linearkombinationen können aus bereits definierten Listen neue Listen gebildet werden (siehe Figur 3.4).

```
#14: DM_1 + DM_2
#15: 1·DM_1
#16: 2·DM_2
#17: 1·DM_1 + 2·DM_2
```

Figur 3.4

Der Befehl **Vereinfache** bewirkt wieder die Evaluierung der neu gebildeten Listen (siehe Figur 3.5).

```
#22: [20, 21, 22, 23, 24, 25]
#23: [10, 12, 14, 16, 18, 20]
#24: [20, 18, 16, 14, 12, 10]
#25: [30, 30, 30, 30, 30, 30]
```

Figur 3.5

Für das operative Verständnis der CAS-generierten Formalen, seien es die Listen, die Tabellen, die Grafen oder auch die Linearkombinationen aus Listen, sind *Interpretationen* unbedingt erforderlich. Dabei werden der Befehl **Vereinfache** und der Schalter **Ausdruck zeichnen** zu wichtigen und nützlichen Visualisierungs-Helfern für die Schüler.

Beispiele für Interpretationen:

CAS-generierte Formale Tabelle:
Die Variable **TAB1** beschreibt eine zweispaltige Tabelle. Nach Vereinfachen wird der funktionale Zusammenhang zwischen der Versuchszahl **n** und der Variablen **DM_1** deutlich (siehe Figur 3.6):
Je größer die Versuchszahl n ist, desto mehr 1-DM-Stücke werden auf dem Kalender platziert.

$$\textbf{TAB1} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 12 \\ 3 & 14 \\ 4 & 16 \\ 5 & 18 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

Figur 3.6

CAS-generierte Formale Graf einer Tabelle:
Der Graf der Tabelle **TAB1** besteht aus 6 Punkten und stellt einen linearen Zusammenhang zwischen der Versuchszahl **n** und der Variablen **DM_1** dar. Das wachsende Monotonieverhalten der Funktion ist gut erkennbar (siehe Figur 3.3).

CAS-generierte Formale Linearkombination:
Die Linearkombination **DM_1+DM_2** (siehe Figur 3.7) beschreibt eine Liste von 6 Zahlen, wobei jede Zahl angibt, wie viele Geldstücke auf dem Kalender platziert werden.

```
#22: [20, 21, 22, 23, 24, 25]
```

Figur 3.7

Um eine dem Sachverhalt angemessene Gleichung zuordnen zu können, wird nun der wesentliche Textbezug, der zu den algebraischen Bedingungen des Sachverhaltes führt, hergestellt. Dazu werden die Tabellen durch den Befehl **Vereinfache** mittels des Gleichheitszeichens ausgewertet (siehe Figuren 3.8 und 3.9).

$$[n, DM\_1+DM\_2]` = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 2 & 21 \\ 3 & 22 \\ 4 & 23 \\ 5 & 24 \\ 6 & 25 \end{bmatrix}$$

Figur 3.8

Nur bei der Versuchszahl n=5 werden alle 24 Kalenderkästchen mit den beiden Arten von Geldstücken ausgefüllt.
Kurz: **DM_1+DM_2=24**

$$TAB4 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 2 & 30 \\ 3 & 30 \\ 4 & 30 \\ 5 & 30 \\ 6 & 30 \end{bmatrix}$$

Figur 3.9

Für n=5 wird auch die Bedingung der Gesamtausgabe von 30 DM erfüllt.
Kurz: **1*DM_1+2*DM_2=30**

Beide Bedingungen müssen erfüllt werden.

Algebra und Semantik:

Mit $x \in \mathbb{N}^*$ und $y \in \mathbb{N}^*$:
x+y=24 (y=24-x, x=24-y)) und 1*x+2*y=30.
Unter alleiniger Verwendung der Variablen x gilt die Gleichung: (i) **1*x+2*(24-x)=30**
Unter alleiniger Verwendung der Variablen y gilt die Gleichung: (ii) **1*(24-y)+2*y=30**

<u>Schülerkommentar als Teilaufgabe:</u>

Dabei beschreiben die Variablen x und y:
x... die unbekannte Anzahl der 1-DM-Stücke und
y... die unbekannte Anzahl der 2-DM-Stücke.

Mathematische Lösungen der Gleichungen: (i): x=18 bzw. (ii): y=6

Probe am Text:

18 Stücke von 1-DM zeigen einen Geldbetrag von 18 DM an.
6 Stücke von 2-DM zeigen einen Geldbetrag von 12 DM an.
Zusammen ergibt das 30 DM.
18 und 6 Geldstücke reichen für 24 Kästchen im Adventskalender.
Die Lösungen erfüllen alle Sachbedingungen.

Praktische Lösung im Antwortsatz:

Für die 24 Kästchen im Adventskalender benötigt Beate 18 1-DM-Stücke und 6 2-DM-Stücke.

Wozu aber die Gleichungen?

Für die eingangs gestellte Aufgabe sind die Gleichungen zwar ganz nützlich, wenn man den algebraischen Lösungsweg bevorzugt. Wie wir aber gesehen haben, sind sie nicht notwendig. Die Arbeit mit den Gleichungen hat allerdings noch gar nicht richtig begonnen. Ihr Sinn wird deutlicher durch:

Löse die folgende Zusatzaufgabe:

Beate verfolgt noch eine ganz andere Idee, wie sie den Adventskalender einrichten kann. Für den 24. Dezember wird sie ein 5-DM Stück verwenden. Sie hat
a) insgesamt 35 DM zur Verfügung,
b) insgesamt 40 DM zur Verfügung.
Wie viele 1-DM- und wie viele 2-DM-Stücke benötigt sie nun in beiden Fällen?

Betrachten wir die bekannte Gleichung der ersten Textaufgabe: 1*x+2*(24-x)=30

Zu a)
(1) Was hat sich im Text inhaltlich geändert und was ist gleich geblieben?

Änderungen	gleich geblieben
Es werden nur noch 23, statt 24 Kästchen mit 1-DM- und 2-DM-Stücken ausgefüllt.	Für 1-DM- und 2-DM-Stücke belaufen sich die Gesamtausgaben wieder auf 30 DM.

(2) Wir ändern die obige Gleichung wie folgt ab: 1*x+2*(23-x)=30

Wir lösen die Gleichung in DERIVE mit Hilfe des **SOLVE**-Befehls (siehe Figur 3.10):

```
#1:   SOLVE(1·x + 2·(23 - x) = 30, x)
#2:   [x = 16]
```

Figur 3.10

Zu b)
(1) Was hat sich im Text inhaltlich geändert und was ist gleich geblieben?

Änderungen	gleich geblieben
Es werden nur noch 23, statt 24 Kästchen mit 1-DM- und 2-DM-Stücke ausgefüllt. Für 1-DM- und 2-DM-Stücke belaufen sich die Gesamtausgaben auf 35 DM.	---

(2) Wir ändern die obige Gleichung wie folgt ab: 1*x+2*(23-x)=35

Wir lösen die Gleichung in DERIVE mit Hilfe des **SOLVE**-Befehls (siehe Figur 3.11):

```
#3:   SOLVE(1·x + 2·(23 - x) = 35, x)
#4:   [x = 11]
```

Figur 3.11

(3) Wir formulieren die Antwortsätze mit den praktischen Lösungen:

Zu a) Wenn bei einer Gesamtausgabe von 30 DM Beate 23 Kästchen des Adventskalenders mit 1-DM-und 2-DM-Stücke füllen möchte, dann benötigt sie von den 1-DM-Stücken 16 und von den 2-DM-Stücken 7.

Zu b) Wenn bei einer Gesamtausgabe von 35 DM Beate 23 Kästchen des Adventskalenders mit 1-DM- und 2-DM-Stücke füllen möchte, dann benötigt sie von den 1-DM-Stücken 11 und von den 2-DM-Stücken 12.

(4) Wir überzeugen uns von der Richtigkeit unserer Antworten durch Proben am Text:

Zu a) 16 Stücke von 1-DM ergeben einen Geldbetrag von 16 DM. 7 Stücke von 2-DM ergeben einen Geldbetrag von 14 DM. Zusammen sind das 30 DM. Dabei wurden insgesamt 23 Geldstücke (nur 1-DM- und 2-DM-Stücken betrachtet) auf dem Kalender platziert. Mit den beiden Lösungen sind alle Sachbedingungen erfüllt.

Unsere Erkenntnis:

> Gleichungen sind zur Lösung auch hierbei nicht notwendig gewesen, aber durch den schnellen Austausch bestimmter Zahlen sehr effektiv.

Wir interpretieren die Platzhalter und Terme einer parametrisierten Gleichung:

Teil-Aufgaben:

1. Kennst du die allgemeine Bedeutung aller Platzhalter in den verwendeten Gleichungen? Ordne diesen ihre Einheiten zu.

1	*	x	+	2	*	(	24	-	x	)	=	30	
1	*	x	+	2	*	(	23	-	x	)	=	30	
1	*	x	+	2	*	(	23	-	x	)	=	35	
○	*	○	+	○	*	(	○	-	○	)	=	○	
a	*	**b**	+	**c**	*	**(**	**d**	**-**	**b**	**)**	**=**	**e**	Gleichungstyp (voll parametrisiert)

a ... Geldwert eines Geldstücks der Sorte a.

b ...

...

2. Welche Zahlenbereiche vertreten die einzelnen Platzhalter? Gibt es Einschränkungen, wenn ja, warum?

a ... a∈{0.01; 0.02, 0.05, 0.10, 0.50, 1.00, 2.00, 5.00, 10. 00, 20.00, 50.00, 100.00, 500.00, 1000.00} (DM-Geldbeträge)

b ... $b \in \mathbb{N}_{\mathbf{1...24}}$ (Anzahl aller Kästchen im Adventskalender)

c ... c∈...

...

f ...

3. Gib die Bedeutung aller Terme in sinnvollen zweistelligen Operationen an!
   a * b ... Geldwert von b Geldstücken der Sorte a.
   ...

4. Welche zweistelligen Operationen ergeben keinen Sinn?
   b+c (Anzahl+Wert)

5. Welche Termverkettungen (Terme mit mehr als einer Elementaroperation) ergeben einen eigenen Sinn?
   c * (d-b) ... Geldwert von (d-b) Geldstücken der Sorte c.
   ...

6. Welche Bedeutungen haben der linke und rechte Term der Gleichung?
   TLINKS(a, b, c, d) := a * b +c * (d - b) ... Geldwert in allen Kästchen (in DM)
   TRECHTS(e) := e ... zur Verfügung stehender Geldwert (in DM)

7. Formuliere zwei ähnliche Textaufgaben, die mit der gleichen parametrisierten Gleichung gelöst werden können, aber unterschiedliche Lösungsvariablen haben. Gib an:
   - alle Substitutionen für alle Platzhalter,
   - die Sach-Gleichung,
   - die mathematische Lösung für x,
   - die praktische Lösung im Antwortsatz.

   a) Sven bastelt für seinen kleinen Bruder einen Adventskalender. Darin möchte er alle Kästchen mit 5-DM- und 2-DM-Stücken ausfüllen. Insgesamt hat er 60 DM zur Verfügung. Wie viele 5-DM-Stücke und wie viele 2-DM-Stücke braucht er?

      # **parametrisierte Gleichung**: TLINKS(a, b, c, d) = TRECHTS(e)
      # **Substitutionen:** a $\leftarrow$ 5; b $\leftarrow$ x; c $\leftarrow$ 2; d $\leftarrow$ 24; e $\leftarrow$ 60
      # **ausgefüllte Gleichung:** 5*x+2*(24-x)=60
      # **mathematische Lösung:** x=4 (siehe Figur 3.12)
      # **Antwortsatz:** Sven braucht 4 5-DM-Stücke und 20 2-DM-Stücke.

```
#1:  TLINKS(a, b, c, d) := a·b + c·(d - b)
#2:  TRECHTS(e) := e
#3:  TLINKS(5, x, 2, 24) = 3·x + 48
#4:  TRECHTS(60) = 60
#5:  TLINKS(5, x, 2, 24) = TRECHTS(60)
#6:  SOLVE(TLINKS(5, x, 2, 24) = TRECHTS(60), x)
#7:  [x = 4]
```

Figur 3.12

   b) Sven bastelt für seinen kleinen Bruder einen Adventskalender. Darin möchte er alle Kästchen mit 5-DM- und 2-DM-Stücken ausfüllen. Insgesamt hat er 8 Stück von den 5-DM-Münzen. Wieviel Geld benötigt Sven insgesamt?

parametrisierte Gleichung: TLINKS(a, b, c, d) = TRECHTS(e)
Substitutionen: a ← 5; b ← 8; c ← 2; d ← 24; e ← x
Sach-Gleichung: 5*8+2*(24-8)=x
mathematische Lösung: x=72 (siehe Figur 3.13)
Antwortsatz: Sven braucht insgesamt 72 DM.

```
#1:   TLINKS(a, b, c, d) := a·b + c·(d - b)
#2:   TRECHTS(e) := e
#3:   TLINKS(5, 8, 2, 24) = 72
#4:   TRECHTS(x) = x
#5:   TLINKS(5, 8, 2, 24) = TRECHTS(x)
#6:   72 = x
```

Figur 3.13

Unsere Erkenntnis:

Textaufgaben werden gekennzeichnet durch gegebene und gesuchte Größen.

Verschiedene Textaufgaben können durch ein und denselben *Gleichungstyp* (parametrisierte Gleichung) mathematisch beschrieben werden.

In einem solchen Fall liefert die *Methode der Substitution* zu einer gegebenen Textaufgabe die konkrete Sachgleichung.

4 Interpretieren in eine symbolische Sprache will gelernt sein - Vorsicht x-y-Falle

Oftmals liegt der Teufel im Detail. Texte an sich sind noch ***keine*** *Informationen, sie sind lediglich deren Träger. Informationen entstehen ausschließlich in unserem Kopf. Texte bestehen aus Sätzen, diese aus einzelnen Wörtern und Satzzeichen und die Wörter aus einzelnen Buchstaben. Der Sinn eines Textes, also die Information einer Zeichenreihe ist ein rein geistiges und individuelles Produkt. Eine plausible Begründung für diese These sind Witztexte, der eine erkennt aus einem solchen Text eine Information über die er lachen kann, der andere braucht vielleicht für die Verarbeitung mit ähnlich menschlicher Regung ein bisschen länger. Was können wir Lehrer tun, um die geistige Verarbeitung unserer Schülerinnen und Schüler zu aktivieren und zu kanalisieren? Um diese Frage zu beantworten, muss das Rad nicht neu erfunden werden. Wir müssen lehren, wie man einen Text mathematisch interpretieren kann und gerade dann, wenn glücklicherweise Fehler entstehen. Dabei kann es, wenn vielleicht auch nicht beabsichtigt, im Ergebnis von Interpretationen zu einer Mehrdeutigkeit kommen. Also ran an die mehrdeutigen Texte und das Fehlermachen nicht nur erlauben, sondern regelrecht einfordern.*

Aufgabe:

An einer Universität sind 21 Professoren beschäftigt. Auf jeden Professor kommen 84 Studenten. Wie viele Studenten studieren an der Universität?

Die Lösung ist schnell gefunden. Wenn jeder Professor 84 Studenten hat, dann sind an der Universität 21*84 = 1764 Studenten.

Nutzen wir die Aufgabe, um das Aufstellen von Gleichungen oder Ungleichungen zu üben. Zuerst legen wir uns zur besseren Übersichtlichkeit eine Tabelle an. Da wären:

Anzahl der Professoren	**Anzahl der Studenten**
21	1764
1	84

Wir führen für die Größen aus dem Tabellenkopf Variablen ein.

P... Anzahl der Professoren, $P \in \mathbb{N}^*$

S... Anzahl der Studenten, $S \in \mathbb{N}^*$

So gilt zum Beispiel:

Wenn P:=1, **so** S=84. Oder **Wenn** P:=21, **so** S=1764.
(sprich: „Wenn P der Wert 1 zugeordnet wird, so gilt S gleich 1764.")

Für beide Fälle gilt die Gleichung: **P*84=S**.
In die Alltagssprache interpretiert, bedeutet das:

Um die Anzahl der Studenten dieser Universität zu bestimmen, multipliziert man die Anzahl der Professoren mit der Zahl 84.

Übungen:

1a. Was bedeuten die Gleichungen? Welche sind sinnvoll, welche nicht?
Argumentiere mit den Zahlen aus der obigen Tabelle!

(1) S*84=P (2) S/P=84 (3) S=P/84 (4) P/S=21/1764

1b. 1/7 aller Professoren der oben angesprochenen Universität sind Privatdozenten. Wie viele Studenten werden von Professoren im Beamtenverhältnis unterrichtet?
Stelle eine Tabelle auf, die Auskunft zu folgenden Fragen gibt: Wie viele Professoren lehren als Privatdozent, wie viele Professoren befinden sich im Beamtenverhältnis, wie viele Studenten werden von Beamten-Professoren und wie viele von Privat-Professoren unterrichtet. Formuliere zur Lösung der Textaufgabe eine Gleichung!

2. Überprüfe jeweils mit Hilfe geeigneter Zahlen aus einer selbst ausgedachten und angelegten Größentabelle, ob der Sachverhalt mit der gegebenen Gleichung zahlenmäßig richtig erfasst wird! Korrigiere gegebenenfalls die Gleichung!

(A)	In der Klasse 7a gibt es 4 Jungen mehr als Mädchen. (M... Anzahl der Mädchen, J... Anzahl der Jungen)	J=M+4
(B)	Tanja ist heute 1/3 mal so alt, wie ihre Mutter. (T... Alter von Tanja, M... Alter der Mutter)	M=1/3 T
(C)	Zwei Firmeninhaber teilen sich ihren Gewinn entsprechend ihrer Kapitaleinlagen. Herr Müller zahlte zur Gründung der Firma 38000 DM und Herr Schulz 47500 DM als Kapitaleinlagen ein. (M... Gewinnanteil von Herrn Müller, S... Gewinnanteil von Herrn Schulz)	M/S=4/5
(D)	Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ergibt 99. (n... sei eine beliebige natürliche Zahl, außer Null.)	3n+3=99
(E)	Eine gerade Zahl vermehrt um 5 ist gleich 15. (x ... sei eine gerade, natürliche Zahl.)	x+5=15
(F)	Der Flächeninhalt eines Quadrates mit unbekannter Seitenlänge a betrage 100 mm^2.	4 a =100 (a in mm)

Unsere Erkenntnis:

Das Anlegen von Tabellen mit einem Größenkopf und sinnvollen Zahlenmaterial kann das Aufstellen von Gleichungen erleichtern.

5 Auch Ungleichungen können nützlich werden
(denn Ungleichungen sind nur etwas ungleicher als Gleichungen)

Widmen wir uns der nächsten Textaufgabe. Sie wird uns zeigen, dass auch Ungleichungen sinnvoll sein können.

Aufgabe:

Markus und seine drei Freunde haben sich durch Ferienjobs zusammen 2950 DM verdient. Sie wollen mit diesem Geldbetrag gemeinsam einen Campingurlaub gestalten. Um den Urlaub finanzieren zu können, überlegen die vier, welche Ausgaben auf sie zukommen und wie lange sie campen können. Die Hin- und Rückfahrt kostet für alle zusammen 340 DM. Für jeden plant man ca. 25 DM Tageskosten für Verpflegung und Freizeitunternehmungen ein. Außerdem müssen für jede Person pro Tag 14 DM Campinggebühren ausgegeben werden. Wie viele Tage können die Jungen *höchstens* bleiben?

Wir überlegen und notieren:

(1) Die Antwort müßte prinzipiell so formuliert werden:

Die vier Jungen können höchstens (nicht mehr als) **x** *Tage Campingurlaub gestalten.*

(2) Um die maximale Anzahl an Tagen ausrechnen zu können, benötigen wir alle Ausgaben und das Budget.

Es gibt in der Textaufgabe zwei Arten von Ausgaben, zum einen die *einmaligen Ausgaben* und zum anderen die *täglichen Ausgaben für jeden Einzelnen*. Zu den einmaligen Ausgaben zählen allein die Fahrtkosten für die Hin- und Rückfahrt. Diese betragen für alle 4 Jungs zusammen 340 DM. Bei den täglichen Ausgaben für jeden Einzelnen gibt es zwei Posten, zum einen die Campinggebühren von 14 *DM pro Tag und pro Person* und zum anderen die Tageskosten von ca. 25 *DM pro Tag und pro Person*. Das Budget ist bekannt, es sind 2950 DM.

(3) Stellen wir eine Bilanz in Form einer Tabelle auf:

Ausgaben	**Budget**
340 DM Fahrtkosten 14 DM pro Tag und pro Person Campinggebühren 25 DM pro Tag und pro Person Verpflegung	2950 DM

(4) Schauen wir uns in einer auswertenden Tabelle an, welche Kosten pro Tag für die Campinggruppe entstehen. Dabei wollen wir besonders auf wiederkehrende Rechenabläufe achten und notieren deshalb ausführlich den Rechenweg.

Anzahl der Tage	Tägliche Kosten für die 4 Jungen in DM	Einmalige Kosten für die 4 Jungs in DM	Gesamtkosten in DM
1	1*(4*14+4*25) *(156)*	340	1*(4*14+4*25)+340 *(496)*
2	2*(4*14+4*5) *(312)*	340	2*(4*14+4*25)+340 *(652)*
3	3*(4*14+4*25) *(468)*	340	3*(4*14+4*25)+340 *(808)*
4	4*(4*14+4*25) *(624)*	340	4*(4*14+4*25)+340 *(964)*

Wir nehmen einen wiederkehrenden Rechenablauf wahr.

… … …

10	**10***(4*14+4*25) *(1560)*	340	**10***(4*14+4*25)+340 *(1900)*
11	**11***(4*14+4*25) *(1716)*	340	**11***(4*14+4*25)+340 *(2056)*

… … …

18	**18***(4*14+4*25) *(2808)*	340	**18***(4*14+4*25)+340 *(3148)*

(5) Uns wird jetzt klar, wie die *Gesamtkosten* in Abhängigkeit *der Anzahl der Tage* entstehen. Wir führen die Variable **TAGE** ein:

TAGE * (4*14+4*25)+340 mit **TAGE**$\in\mathbb{N}^*$.
Dieser Rechenausdruck (Term) kann so interpretiert werden:

1 **Wenn** TAGE= 1, **dann** TAGE * (4*14+4*25)+340= 496.
2 **Wenn** TAGE=11, **dann** TAGE * (4*14+4*25)+340=2056.
3 **Wenn** TAGE=18, **dann** TAGE * (4*14+4*25)+340=3148.

(6) Es ist möglich den gesuchten Wert für die Variable **TAGE** abzuschätzen.

Der Wert des Terms **TAGE * (4*14+4*25)+340** darf den Wert des Budgets von 2950 DM nicht übersteigen, er muß darunter bleiben.

TAGE*(4*14+4*25)+340 *„kleiner oder gleich"* 2950

(Ungleichung ✷): **TAGE*(4*14+4*25)+340 ≦ 2950**

Aus den Interpretationen 2 und 3 aus Abschnitt (5) folgt: Der gesuchte Wert von **TAGE** liegt zwischen **11** und **18**, denn **2056** < 2950 < **3148**.

(7) Wir übergeben die Ungleichung ✷ zur Auflösung nach der Variablen **TAGE** an DERIVE:

```
#1:  TAGE·(4·14 + 4·25) + 340 ≤ 2950
#2:  SOLVE(TAGE·(4·14 + 4·25) + 340 ≤ 2950, TAGE)
#3:  [TAGE ≤ 435/26]
#4:  [TAGE ≤ 16.7307]
```

Figur 5.1

Im obigen DERIVE-Protokoll steht in Zeile # 3 die mathematische Lösung $\left[\text{TAGE} \le \dfrac{435}{26}\right]$ und in Zeile #4 eine Näherungslösung.

(8) Um einen Antwortsatz formulieren zu können, müssen wir entsprechend des Sachverhaltes aus dem Aufgabentext diese mathematische Lösung in eine praktische Lösung interpretieren. *Unsinnig* wäre mit Sicherheit die bloße Übernahme des Ergebnisses, denn dann würde gelten: *Der Urlaub darf nicht länger als 16.7307 Tage dauern.* Diese Angabe entspricht nicht den praktischen Vorstellungen von Zeitangaben, gemessen in Tagen, denn die Dezimalstellen nach dem Punkt sind völlig uninteressant. Deshalb runden wir das mathematische Ergebnis auf eine ganze Zahl, aber nicht nach den Regeln der Mathematik, sondern nach sachlichen Gesichtspunkten:

Nach den Regeln der Mathematik:	**16.7307 ≈ 17**	Für höchstens 17 Tage reicht das Budgets von 2950 DM. Falsch, denn Wenn TAGE=17, dann TAGE * (4*14+4*25)+340=2992 und 2992<2950 (falsche Aussage).
Nach sachlichen Gesichtspunkten:	**16.7307 sachlich gerundet: 16**	Wenn TAGE=16, dann TAGE * (4*14+4*25)+340=2836 und 2836<2950 (wahre Aussage).

(9) Eine sinnvolle Antwort lautet also (vergleiche mit Überlegung (1)):

Die vier Jungen können höchstens (nicht mehr als) **16** Tage Campingurlaub gestalten.

Unsere Erkenntnisse:

Nicht nur Gleichungen können helfen, Textaufgaben sinnvoll zu lösen, sondern auch Ungleichungen. Inhaltliche Überlegungen bestimmen maßgeblich unser Handeln beim Lösen von Textaufgaben. Das Aufstellen und das Lösen von Gleichungen oder Ungleichungen ordnen sich stets den inhaltlichen Überlegungen unter.

Übung:
Kann die o.a. Textaufgabe nicht auch als Gleichung interpretiert werden? Was wäre denn dann anders?

6 Prozentaufgaben und die Ursprungsgerade - eine Reflexion

Wir wollen in diesem Dokument ein grafisches Lösungsverfahren im Sinne eines zweidimensionalen Darstellungsansatzes für schultypische Prozentaufgaben vorstellen und davon ausgehend eine 'Brükke' aufbauen, die uns zur bekannten algebraischen Darstellungsweise (ver-) führen wird. Beginnen werden wir mit 3 exemplarischen Aufgaben aus dem Lernbereich der Grundaufgaben zur Prozentrechnung.

PS: Auf die Vermittlung eines Dreisatzes wird verzichtet. Lediglich der Begriff Zuordnung, Darstellungen von Zuordnungen und insbesondere die Begriffe Ursprungsgerade und Anstiegsfaktor von Ursprungsgeraden werden als bekannt vorausgesetzt. Auf die Problematik: Wie finde ich bloß die Gleichung?, speziell in diesem Fall der Verhältnisgleichung, gehen wir nicht ein. Persönlich geben wir hier den grafischen Verfahren den Vorzug.

Grundaufgaben

Aufgabe 1 (Bestimmung des Prozentwertes):

Bei der jüngsten TED-Auswertung der Hitparade haben der erste, der zweite und der dritte Titel von 4600 abgegebenen Stimmen jeweils einen Anteil von 32 %, 25 % und 14 % bekommen. Wie viele Stimmen hat jeder dieser Titel erhalten?

(1) Verarbeiten wir die gegebenen und gesuchten Größen in einer Größentabelle der folgenden Art und ergänzen diese durch weitere wichtige Bezugsgrößen, die wir inhaltlich erschließen.

Tabelle 1a:

Prozentsatz in %	14	25	32
Anzahl der Stimmen	x	y	z

Tabelle 1b:
Ergänzung durch inhaltliches Erschliessen.

Prozentsatz in %	0	1	14	25	32	50	100
Anzahl der Stimmen	0	46	x	y	z	2300	4600

<u>4600 Stimmen entsprechen dem ganzen Teil, also 100</u>.
46 Stimmen entsprechen dem 100. Teil, also 1.
0 Stimmen entsprechen dem 0. Teil, also 0.

(2) Wir können die Werte der gesuchten Platzhalter grob abschätzen:

$46 < x < y < z < 2300$

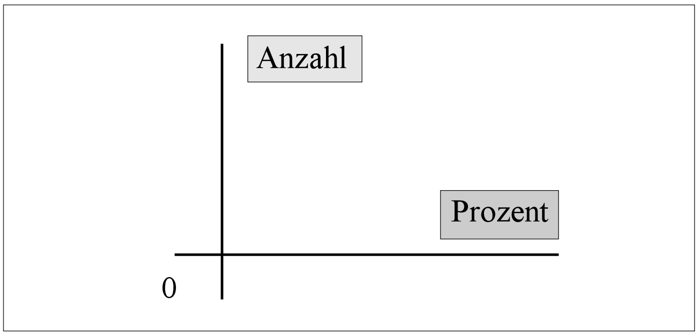
(3) Für die grafische Darstellung extrahieren wir aus der Tabelle 1b die beiden umrahmten Wertepaare (Fixwerte) und bilden eine neue, kleinere Tabelle, bestehend aus nur zwei Zeilen und zwei Spalten im vertikalen Format.

Tabelle 2:

Prozentsatz in %	**Anzahl**
0	0
100	4600 (Grundwert)

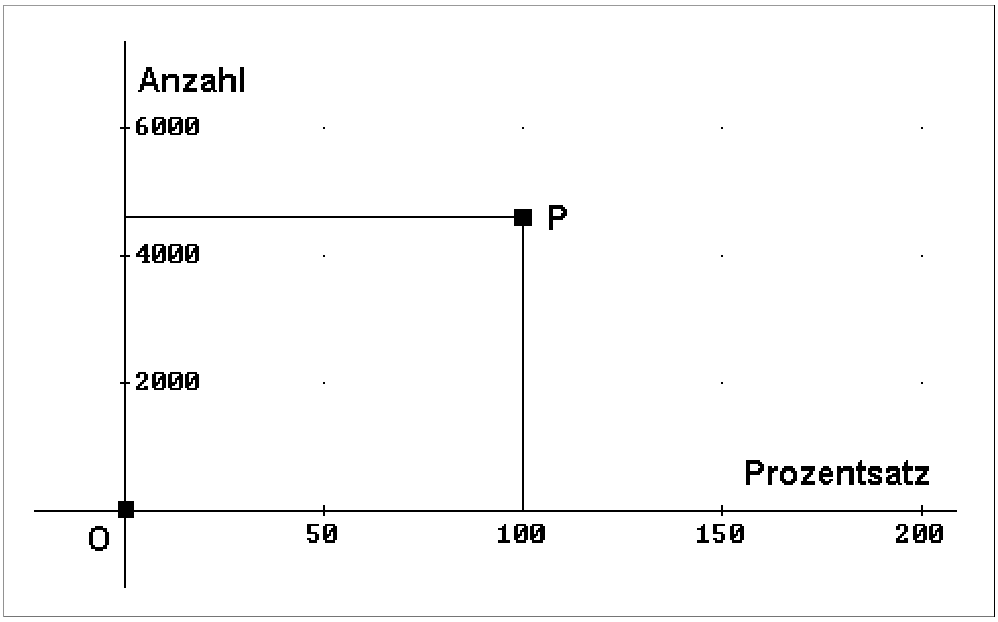
(4) Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem an.

Skizze:



und zeichnen die geordneten Zahlenpaare **[0, 0]** und **[100, 4600]** als Punkte O und P ein.

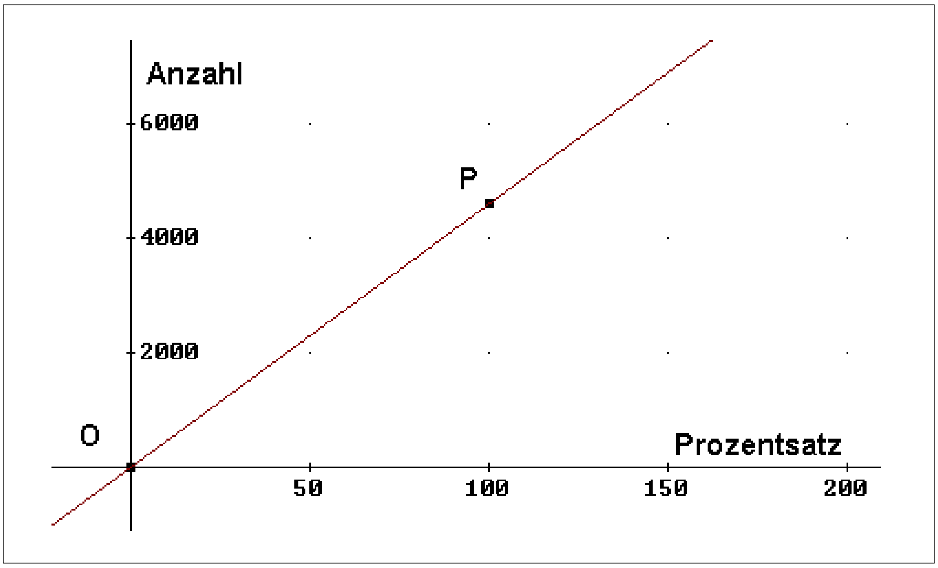
Zeichnung 1:



Figur 6.1

(5) Wir sehen, dass die Punkte P und O eine Ursprungsgerade festlegen.

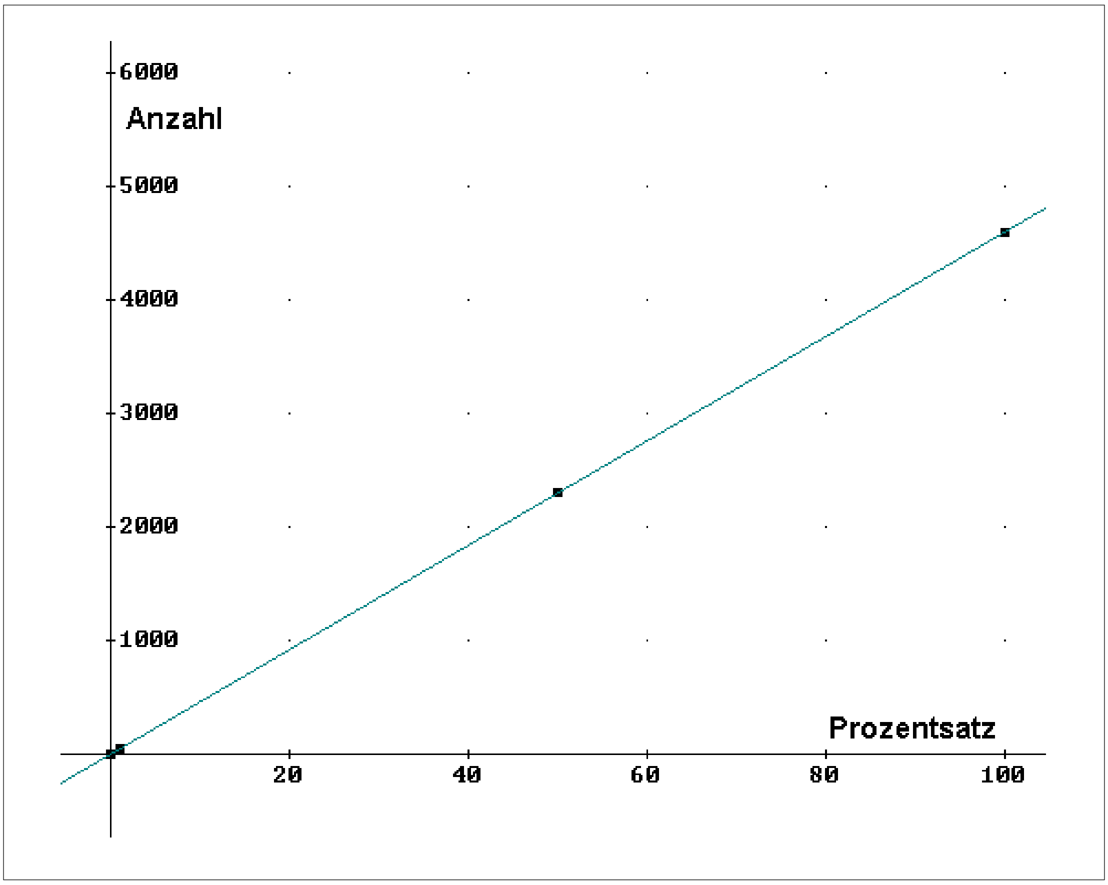
Zeichnung 2:



Figur 6.2

(6) Wir zeichnen auch die geordneten Zahlenpaare [1, 46] und [50, 2300] aus der Tabelle 1 in das gleiche rechtwinklige Koordinatensystem ein und stellen fest,

Zeichnung 3:



Figur 6.3

dass alle 4 Punkte auf der bereits definierten Ursprungsgeraden liegen.

(7) Wir bestimmen den Anstiegsfaktor m der Ursprungsgeraden.

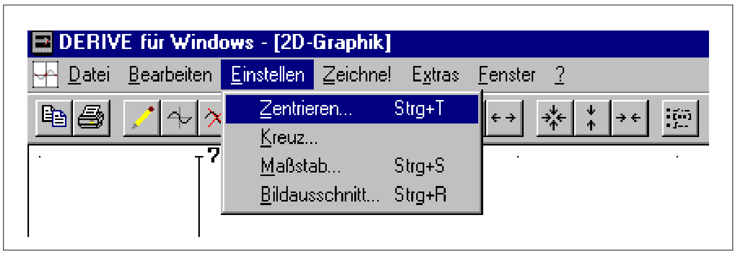
Wir erinnern uns: **m** ist der Ordinatenwert desjenigen Punktes der Ursprungsgeraden, dessen Abszissenwert gleich 1 ist.

Aus der Tabelle 1 entnehmen wir daher das geordnete Zahlenpaar: [1, 46].
m ist also gleich 46 und gibt an, wie viele Stimmen zu 1 % gehören.

(8) Nun können wir den zur Ursprungsgeraden passenden „Entstehungsterm" (unabhängiger Term) bestimmen:

46 * p und p steht für den jeweiligen Prozentsatz (**p** $\in \mathbb{Q}_+$).

(9) Überzeugen wir uns in DERIVE von der Gültigkeit dieses gefundenen Terms.
a) Schreibe in DERIVE: **46 * p** !
b) Stelle diesen Ausdruck grafisch dar!
c) Lege über das Menü **Einstellen/Zentrieren...**



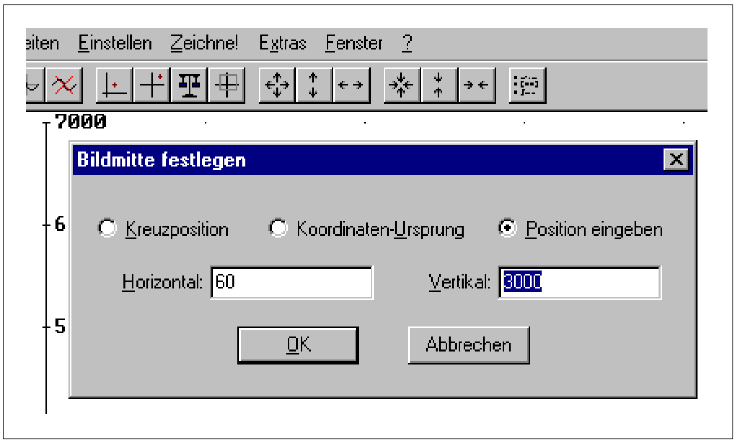
Figur 6.4

die Bildmitte fest:

Horizontal: 60

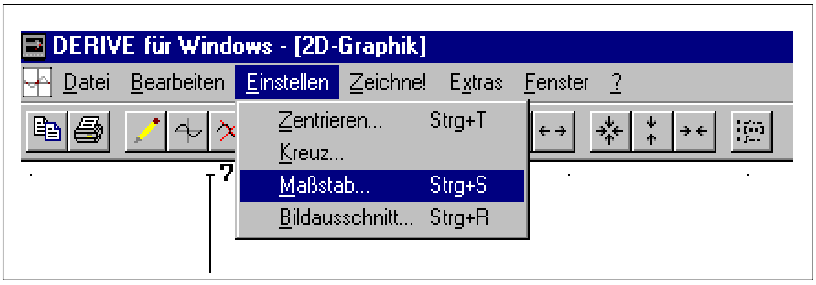
Vertikal: 3000

Position eingeben



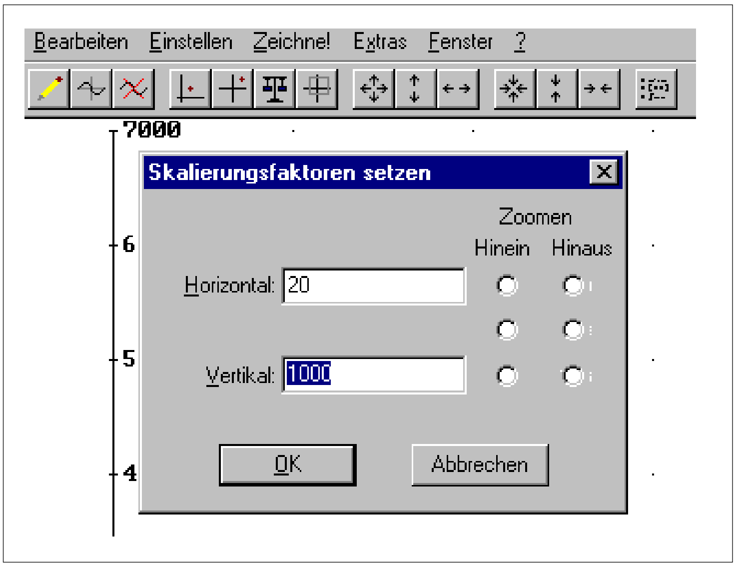
Figur 6.5

d) Setze über das Menü **Einstellen/Maßstab...** geeignete Skalierungsfaktoren:

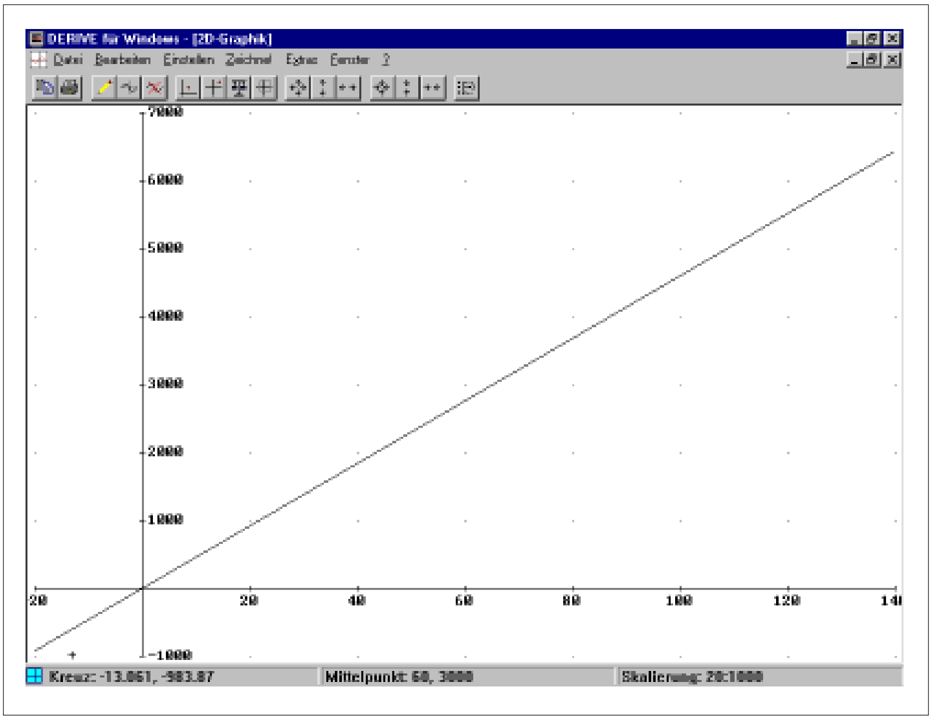


Figur 6.6

Horizontal: 20 **Vertikal:** 1000

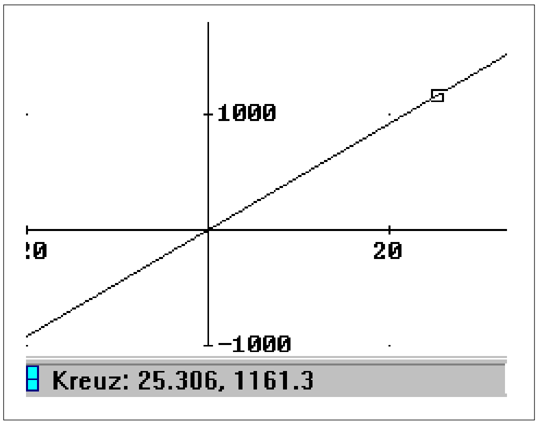


Figur 6.7



Figur 6.8

e) Nun schalte den Spurmodus über die **F3** Taste ein! Das Cursor-Kreuz verwandelt sich in ein Rechteck und setzt sich automatisch auf die Ursprungsgerade. In der Statuszeile unten links kann man nun die aktuelle Position des Cursors ablesen (siehe Figur 6.9). Diesen Vorgang nennt man Scannen der Kreuzkoordinaten. In dem man die beiden Pfeiltasten (← ; →) betätigt, bewegt man den Cursor auf der Ursprungsgeraden.



Figur 6.9

f) Dabei geben die linken und rechten Zahlen Näherungswerte für den Prozentsatz und die Anzahl der Stimmen an. Stelle nun mit Hilfe der beiden Pfeiltasten nacheinander die Werte 14, 25 und 32 so genau wie nur möglich ein!

Prozentsatz in %	**0**	**1**	14	25	32	50	**100**
Anzahl der Stimmen	**0**	46	x	y	z	2300	**4600**

Lese jeweils die zweite Ziffer der Kreuzkoordinaten ab! Runde sinnvoll!

x ≈ 645; y ≈ 1160; z ≈ 1468

g) Aus der Überlegung heraus, wie die einzelnen Punkte der Ursprungsgeraden entstanden sind, können wir mit Hilfe des unabhängigen Terms **46 * p** genauere Werte zur Bestimmung der Anzahl von Stimmen für die folgende Tabelle errechnen.

Prozentsatz	**Anzahl der Stimmen (Prozentwert)**
p	46 * p
0	46 * 0 (= 0)
1	46 * 1 (= 46)
14	46 * 14 (= 644)
25	46 * 25 (= 1150)
32	46 * 32 (= 1472)
50	46 * 50 (= 2300)
100	46 * 100 (= 4600)

Verallgemeinerungen:

Prozentsatz $\xrightarrow{*46}$ **Prozentwert**

Prozentsatz $\xrightarrow{*m}$ **Prozentwert**

Praktische Ergebnisse: x = 644; y = 1150; z = 1472

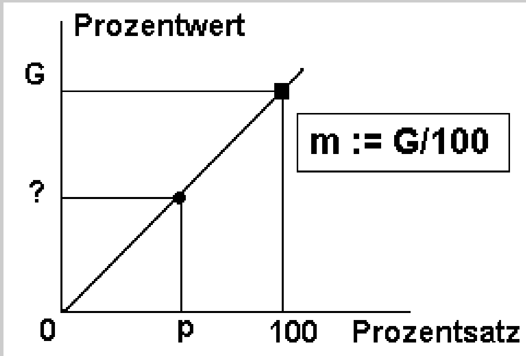
Allgemeines Ergebnis:

Prozentsatz p $\xrightarrow{*m}$ **Prozentwert P**

Prozentsatz p*Anstiegsfaktor m = Prozentwert P

Es gilt immer: [100, G] (G ... Grundwert)

Man beachte, wie der Anstiegsfaktor m definiert wird.

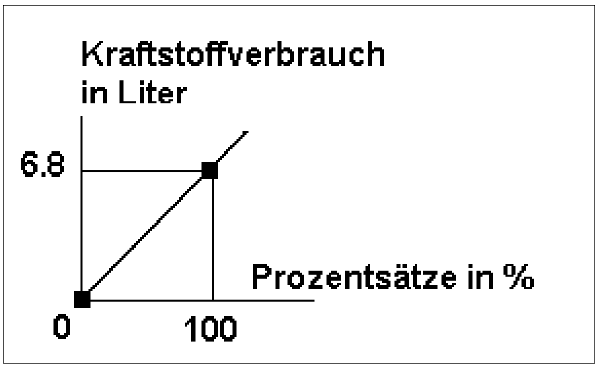


Aufgabe 2 (Bestimmung des Prozentsatzes):

Für einen Pkw ist ein Normverbrauch von 6,8 Liter Kraftstoff auf 100 km vorgegeben. Durch energiesparende und defensive Fahrweise wurden durchschnittlich nur 5,6 Liter für 100 km verbraucht. Wie viel Prozent betrug die Einsparung?

(1) Wir entwickeln wieder aus den Fixwerten [0, 0] und [100, 6,8] eine grafische Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Skizze:



Figur 6.10

(2) Wir definieren den Anstiegsfaktor **m**, passend zur Ursprungsgeraden (siehe Figur 6.10).

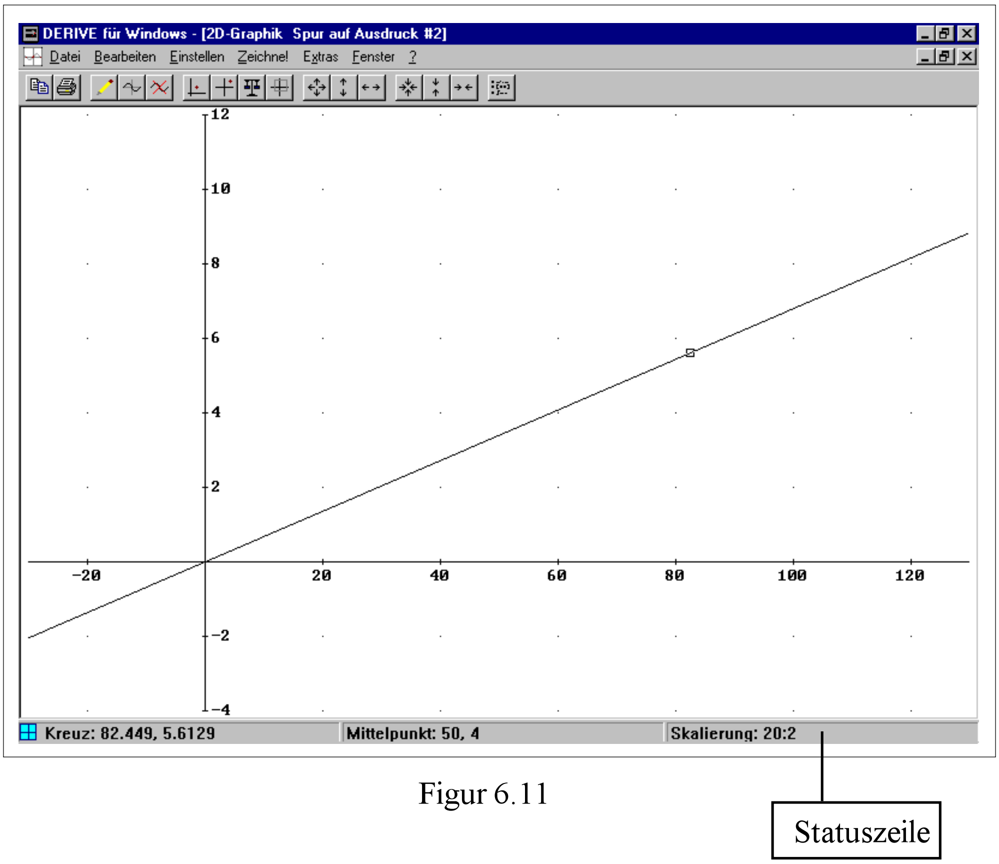
m := 6,8/100

(3) Wir bestimmen den unabhängigen Term, der diese Ursprungsgerade erzeugt.

m*p, **p**$\in\mathbb{Q}_+$

(4) Wir schreiben in DERIVE: **m := 6,8/100**
m*p

(5) Wir stellen den Term **m*p** in DERIVE grafisch dar. Beachte insbesondere die Angaben in der Statuszeile des Bildschirmausdrucks in Figur 6.11!



Figur 6.11

(6) Über das Verfahren des Scannens (F3 Taste benutzen) ermitteln wir einen Näherungswert:

Kreuz: 82.449 5.6129

(7) Wir interpretieren die Kreuzkoordinaten:

Bei einem Kraftstoffverbrauch von nur 5,6 Litern liegt der Prozentsatz bei ca. 82 %. Das bedeutet, es wurden ca. 18 % Kraftstoff eingespart.

(8) Alternativ zur grafischen Lösung können wir auch algebraisch vorgehen.
Mit Hilfe des Terms **m*p**, **p**$\in\mathbb{Q}_+$ mit **m := 0,068** kann die folgende Zahlentabelle erzeugt werden:

Kraftstoffverbrauch in Litern	Prozentsatz in %
0,068 * p	p
0	0
1	1/0,068 (= 14,7)
2	2/0,068 (= 29,4)
5,6	5,6/0,068 (= 82,4)
6,8	6,8/0,068 (= 100)
10	10/0,068 (= 147)

Verallgemeinerungen:

Prozentwert $\xrightarrow{*\frac{1}{0.068}}$ **Prozentsatz**

Prozentwert $\xrightarrow{*\frac{1}{m}}$ **Prozentsatz**

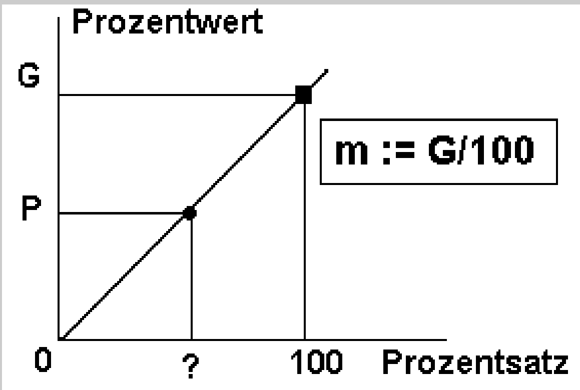
Praktische Ergebnisse: Die Kraftstoffeinsparungen liegen bei ca. 18 %.

Allgemeine Ergebnisse aus den Aufgaben 1 und 2:

Prozentwert P $\xrightarrow{*\frac{1}{m}}$ **Prozentsatz p**

Prozentwert P * 1 / m = Prozentsatz p und **m := Grundwert G/ 100**

Der Anstiegsfaktor **m** ist dabei **operativer Vermittler** zwischen Prozentwert und Prozentsatz. Beide Aufgabenstellungen können durch die grafische Darstellung einer **Ursprungsgeraden** veranschaulicht und gelöst werden.



Solange der Grundwert konstant ist, gilt:

Die Prozentsatzbestimmung ist die **Umkehraufgabe** der Prozentwertbestimmung.
Die Prozentwertbestimmung ist die **Umkehraufgabe** der Prozentsatzbestimmung.

Aufgabe 3 (Bestimmung des Grundwertes):

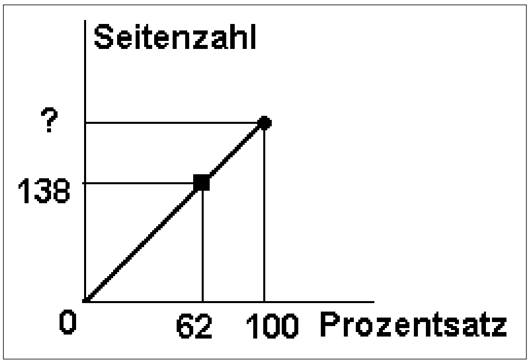
René muss im Rahmen einer längerfristigen Hausaufgabe für das Fach Deutsch ein Buch lesen. Um den Termin für die Erfüllung der Hausaufgabe einhalten zu können, stellt sich René einen Lese-/Zeitplan auf. Innerhalb von vier Wochen möchte er das Buch einmal vollständig gelesen haben. Nach 17 Tagen hat er bereits 62 % aller Seiten des Buches gelesen und ist auf Seite 138.
a) Wie viele Seiten hat das Buch insgesamt?
b) Wird er seinen Zeitplan einhalten können?

Zu a)

(1) Wir entwickeln aus den gegebenen Werten [0, 0] und [62, 138] zuerst eine Tabelle, und daraus eine grafische Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Prozentsatz	**Seitenzahl**
0	0
62	138

Skizze:



Figur 6.12

(2) Wir bestimmen aus der Skizze (siehe Figur 6.12) den Anstiegsfaktor **m** der Ursprungsgeraden und definieren: **m : = 138/62**

(3) Wir geben den unabhängigen Term zur Erzeugung der Ursprungsgeraden an:
m * p , **p**$\in \mathbb{Q}_+$

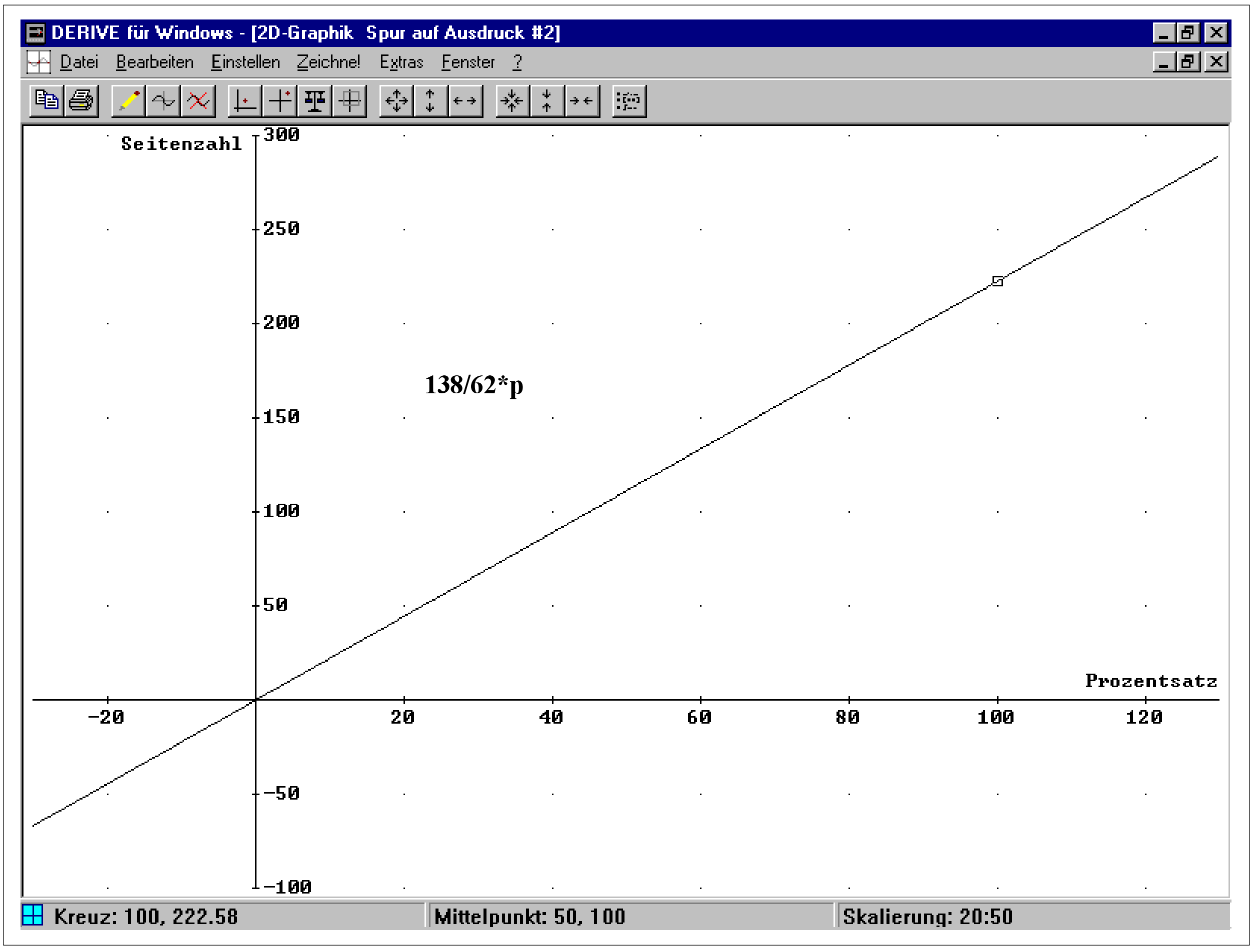
(4) Wir schreiben in DERIVE:
m : = 138/62
m * p

(5) Wir zeichnen in DERIVE den Ausdruck **m * p**.

(6) Wir scannen die Ursprungsgerade und lesen ab (siehe Figur 6.13).
Kreuz: 100, 222.58

(7) Wir interpretieren die Kreuzkoordinaten.
Praktische Lösung (aus der grafischen Lösung): Das Buch hat ca. 223 Seiten.

(8) Mit Hilfe des unabhängigen Terms **m*p** bestimmen wir jetzt auf algebraischem Weg die Gesamtseitenzahl des Buches.
p steht für den Prozentsatz und **m*p** für die Seitenzahl.
Wir schließen mathematisch so:
Wenn p = 100**, so** m*p = 138/62*100 (≈ 222.58065)



Figur 6.13

(9) Wir interpretieren das algebraische Ergebnis und geben dabei ein sachlich sinnvoll gerundetes Ergebnis an.

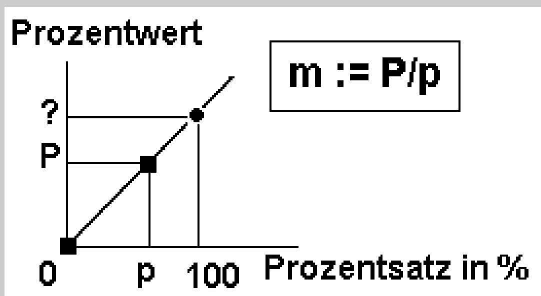
Praktische Lösung: Das Buch enthält **224** Seiten.
(Hinweis: Die Gesamtseitenzahl eines Buches ist immer eine durch 4 teilbare Zahl. Warum?)

Allgemeine Ergebnisse:

Der Grundwert G ist ein spezieller Prozentwert. Es gilt immer [100, G].

Deshalb führen wir die Bestimmung des Grundwertes so durch, wie eine Prozentwertbestimmung.

Man beachte, wie der Anstiegsfaktor m definiert wird.



Veränderter Grundwert

Nun wenden wir uns den Prozentaufgaben zu, bei denen neben dem Grundwert ein **verminderter** bzw. **vermehrter Grundwert** *zusätzlich* vorkommt.

Merke: Es gilt auch hier: [100, G]!

Aufgabe:
Zwei Geschäftsführer, Herr Tüchtig und Herr Pfiffig sind Konkurrenten. Beide verkaufen u. a. Computer und nehmen für eine bestimmte Ware von 2000 DM eine Preisänderung vor.

Herr Tüchtig erhöht zuerst den Preis um 15 % und senkt ihn nach 14 Tagen um 15 %.
Herr Pfiffig senkt zuerst den Preis um 15 % und erhöht ihn nach 14 Tagen um 15 %.

Dokumentiere die veränderte Preisentwicklung in einer Tabelle und in einem Liniendiagramm!

(1) Wir entwickeln zuerst *für die erste Preisänderung* eine Tabelle aus den gegebenen Werten, dann skizzieren wir daraus einen Grafen.

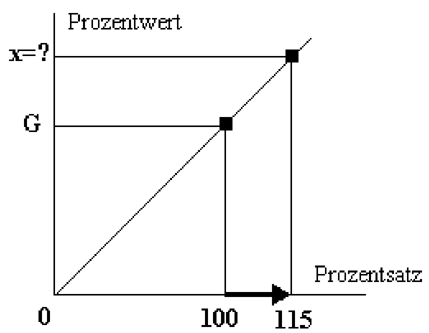
Herr Tüchtig		**Herr Pfiffig**	
Prozentsatz (in %)	Prozentwert (Preis in DM)	Prozentsatz (in %)	Prozentwert (Preis in DM)
0	0	0	0
„**um**_erhöht" 15	„**um**_erhöht" x	„**um**_gesenkt" 15	„**um**_gesenkt" y
100	2000	100	2000

Gleich bedeutend mit (G veränderter Grundwert):*

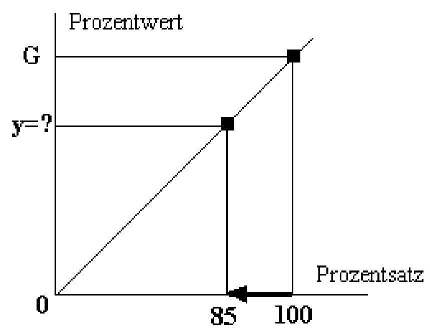
„**auf**_erhöht" 115	„**auf**_erhöht" $G_1^*=2000+x$	„**auf**_gesenkt" 85	„**auf**_gesenkt" $G_2^*=2000-y$

Skizzen zur Bestimmung von Prozentwerten:

G := 2000, m := G/100 (m = 20)



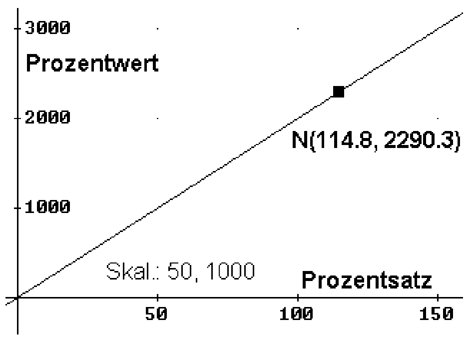
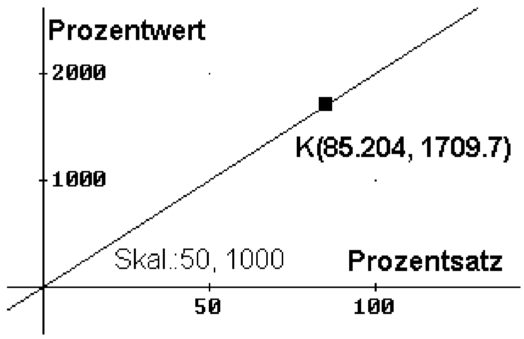
*Erhöhung **um** 15 % = Erhöhung **auf** 115 %.*



*Senkung **um** 15 % = Senkung **auf** 85 %.*

(2) Wir ermitteln in DERIVE eine grafische Lösung.

Unabhängiger Term zur Erzeugung der Ursprungsgeraden:
G :=2000, m := G/100, a $\in \mathbb{Q}_+$
m * p
Interpretation: a gibt den Prozentsatz und m*p den Prozentwert an.

	
Wenn p ≈ 115, so m*p ≈ 2290.	Wenn p ≈ 85, so m*p ≈ 1710.

(3) Wir ermitteln eine algebraische Lösung.

G := 2000 m := G/100 p $\in \mathbb{Q}_+$ m*p | Substituieren 115 → p m*115 | Vereinfachen **2300**	G:=2000 m:=G/100 p $\in \mathbb{Q}_+$ m*p | Substituieren 85 → p m*85 | Vereinfachen **1700**

(4) Wir interpretieren die algebraischen Lösungen.

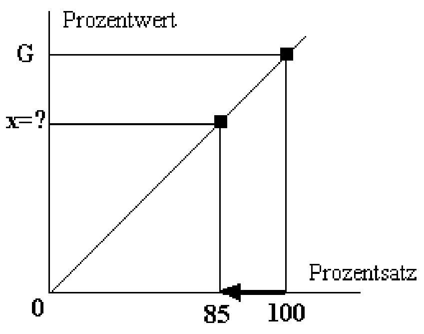
Nach der Preiserhöhung um 15 % kostet die Ware 2300 DM.	Nach der Preissenkung um 15 % kostet die Ware 1700 DM.

(5) Wieder entwickeln wir *für die zweite Preisänderung* eine Tabelle aus den gegebenen Werten, dann skizzieren wir daraus einen Grafen.

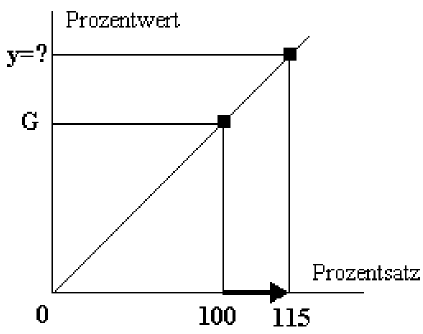
Herr Tüchtig		**Herr Pfiffig**	
Prozentsatz (in %)	Prozentwert (Preis in DM)	Prozentsatz (in %)	Prozentwert (Preis in DM)
0	0	0	0
"**um**_gesenkt" 15	"**um**_gesenkt" x	"**um**_erhöht" 15	"**um**_erhöht" y
100	**2300**	100	**1700**

Gleich bedeutend mit:

"**auf**_gesenkt" 85	"**auf**_gesenkt" **2300**-x	"**auf**_erhöht" 85	"**auf**_erhöht" **1700**+y



Senkung **um** 15 % = Senkung **auf** 85 %.



Erhöhung **um** 15 % = Erhöhung **auf** 115 %.

(6) Wir ermitteln eine algebraische Lösung.

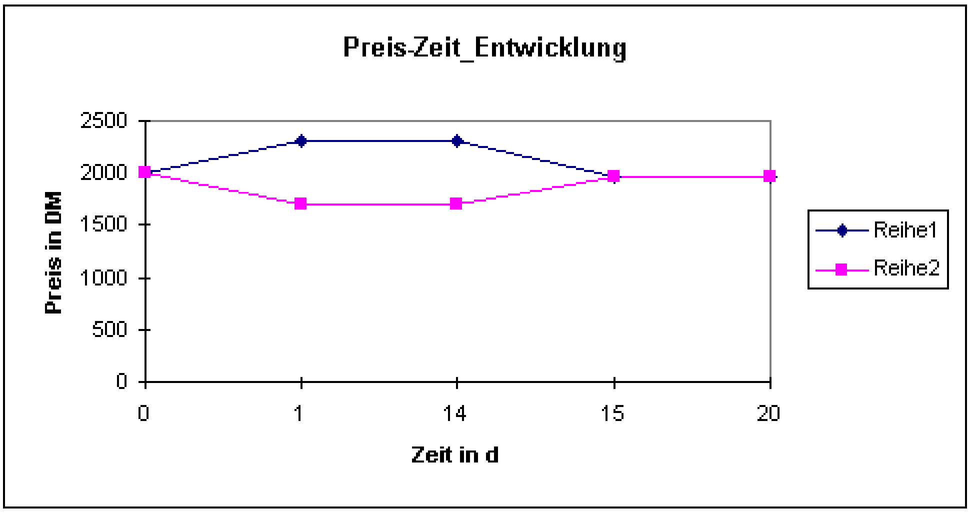
G := 2300		G:=1700	
m .= G/100		m:=G/100	
$p \in \mathbb{Q}_+$		$p \in \mathbb{Q}_+$	
m*p	| Substituieren 85 → p	m*p	| Substituieren 115 → p
m*85	| Vereinfachen	m*115	| Vereinfachen
1955		**1955**	

(7) Wir interpretieren die algebraischen Lösungen.

Nach der Preiserhöhung um 15 % kostet die Ware 1955 DM.	Nach der Preissenkung um 15 % kostet die Ware 1955 DM.

<u>Abschlussdokumentation:</u>

Zeit in d	Preis von Herrn Tüchtig in DM (Reihe 1)	Preis von Herrn Pfiffig in DM (Reihe 2)
0	2000	2000
1	2300	1700
14	2300	1700
15	1955	1955



Figur 6.14
(MS-Excel-Grafik)

Unsere Erkenntnis:

Funktionale Zusammenhänge bei Prozentaufgaben mit veränderten Grundwert können am *Prozentwert - Prozentsatz - Diagramm* durch entsprechende Verschiebungen entlang der horizontalen Achse visualisiert werden. Dabei ist auf die besonderen Bedeutungen der beiden Präpositionen "um" und "auf" zu achten.

7 Geometrie: Analysieren funktionaler Zusammenhänge

Sinnerfassendes Lesen ist eine wichtige Methode des muttersprachlichen Prinzips. Lesen und dabei den Sinn erfassen, vielleicht das Ganze noch simultan, was für eine Herausforderung!

Was kommt da auf uns zu?

Eine Menge: Textarbeit, Interpretieren und Simulieren.

Aufgabe

Verlängert man die Seite eines Quadrates um 9 cm, so vervierfacht sich der Umfang des Quadrates. Wie lang ist eine Seite des Quadrates?

Das sinnerfassende Lesen bei dieser Aufgabe wird nur dann vom Schüler erfolgreich bewältigt, wenn dieser den funktionalen Zusammenhang zwischen den beiden Vorgängen „Verlängern einer Quadratseite" und „Vervierfachen des Umfangs" quantitativ im Einzelnen beschreiben kann. Um diesen grundsätzlichen funktionalen Zusammenhang entdecken zu können, gehen wir von einer Analyse aus und nehmen den Standpunkt ein, wir kennen bereits die gesuchte Seitenlänge des Quadrates. Das Formulieren einer Gleichung (ohne Variablen) wird *vorerst* zur Nebensache.

Analyse:

Start: Wir nehmen an, die Seitenlänge beträgt 10 cm. Die Testzahl wird durch einen Unterstrich markiert.

Die angenommene Seitenlänge von 10 cm stellt ein unabhängiges Objekt dar und wir sind somit in der Lage eine „Umkehrung der Sachaufgabe“ zu formulieren. Wir verwenden bewußt die „wenn-dann"-Form.

Umkehrung der Sachaufgabe (kurz: Umkehraufgabe)

Wenn die Seite eines Quadrates 10 cm lang ist und man verlängert die Seite um 9 cm, vervierfacht sich dann der Umfang des Quadrates?

Aus der Aufgabe ergibt sich folgendes Ursache-Wirkungsdiagramm:

Seitenlänge in cm ↑	→	Umfang in cm ↑
Seitenlänge in cm ↓	→	Umfang in cm ↓

Interpretation:

Wenn die Länge einer Quadratseite zunimmt, dann wird auch der Umfang größer bzw. wenn die Länge einer Quadratseite abnimmt, dann wird auch der Umfang kleiner.

An die zuletzt gewonnene, vorwiegend qualitative Aussage können sich nun verschiedene quantitative Simulationen anschließen. Dabei muss sich ein wichtiges Prinzip bei den Schülern durchsetzen:

Untersuchungsprinzip:

Bei jeder Simulation ist die Abhängigkeit zwischen jeweils ***zwei*** Größen zu untersuchen. Alle anderen am komplexen Zusammenhang beteiligten Größen sind für einen Moment konstant zu halten.

Wir beginnen die Simulationskette mit unserem unabhängigen Objekt und stellen Fragen an den Text der Umkehraufgabe in der „wenn-dann"-Form (kursiver Satzteil als Lückentext).

(1) Wenn die Seite eines Quadrates 10 cm lang ist, wie lang ist die *um 9 cm verlängerte Seite*?

Unabhängige Größe A	**Abhängige Größe B**
Seitenlänge in cm	neue Seitenlänge in cm
10	10+9 → 19

An die Größe B schließt sich direkt an:

(2) Wenn die neue Seite 19 cm lang ist, wie groß ist dann der *Umfang des neuen Quadrates*?

Abhängige Größe B	**Abhängige Größe C**
neue Seitenlänge in cm	neuer Umfang in cm
19	4*19 → 76

Aus den beiden elementaren Simulationen ergibt sich die erste komplexe Simulationskette:

Unabhängige Größe A	**Abhängige Größe B**	**Abhängige Größe C**
Seitenlänge in cm	neue Seitenlänge in cm	neuer Umfang in cm
10	10+9 → 19	4*19 → 76

(3) Wenn die Seite eines Quadrates 10 cm lang ist, wie *groß ist dann sein Umfang*?

Unabhängige Größe A	**Abhängige Größe D**
Seitenlänge in cm	Umfang in cm
10	4*10 → 40

Die abhängigen Größen C und D stellen zwei quantifizierte Wirkungsgrößen dar. Es schließt sich die abschließende Frage der Analyse an:

(4) Wenn der Umfang des Quadrates 40 cm und der Umfang des neuen Quadrates 76 cm betragen, ist dann der neue Umfang *viermal so groß wie der Umfang des ursprünglichen Quadrates*?

Ziel:	Wir setzen als fordernde Gleichung an: **4*Umfang = neuer Umfang** und stellen nach Einsetzen unserer Simulationsergebnisse fest: 4*40 = 76 160 = 76 **falsche Aussage** **Kommentar:** Unter Bezugnahme auf das unabhängige Objekt 10 cm für die Seitenlänge des Quadrates erhalten wir mit der Gleichung **160 = 76** eine falsche Aussage."

Es schließt sich dann an die letzte falsche Aussage der Analyse im Allgemeinen die Synthese an, die das Ziel verfolgt, eine Aussage in Form einer Gleichung mit einer Variablen zu gewinnen. Wir werden aber dieses Vorgehen nicht mehr an diesem geometrischen Beispiel demonstrieren und überlassen es in Empfehlung an den Leser als eine später mögliche Übung.

Wir fassen an dieser Stelle inhaltliche Schwerpunkte und Teilziele unseres didaktisch-methodischen Weges zusammen:

- Sinnerfassendes Lesen einer Textaufgabe stellt eine in sich geschlossene, umfangreiche Schülertätigkeit dar und muss als Fähigkeit mit den Schülern geübt und auch kontrolliert werden.
- Das sinnerfassende Lesen einer Textaufgabe zielt im Wesentlichen auf das Aufdecken einer durch den Text verkappten Relation.
- Eine Methode zum sinnerfassenden Lesen ist das Analysieren funktionaler Zusammenhänge mittels fiktiver Lösungen.
- Oft lassen sich für viele Schülerinnen und Schüler funktionale Zusammenhänge leichter aus einer Umkehraufgabe aufdecken.
- Bei einer Umkehraufgabe geht man von einem unabhängigen Objekt in Form einer Zahl aus. Dieses unabhängige Objekt stellt eine fiktive Lösung der eigentlichen Aufgabe dar (*Analysestart*)
- Die Umkehraufgabe wird einerseits durch ein Ursache -Wirkungsdiagramm qualitativ und andererseits durch elementare und komplexe Simulationsketten quantitativ beschrieben. Dabei ist unbedingt das Untersuchungsprinzip für jeweils zwei Größen einzuhalten.
- Die Analyse endet im Allgemeinen mit der Feststellung: „Unter Bezugnahme des unabhängigen Objekts erhalten wir mit der Gleichung *Zahl 1 = Zahl 2* (bzw. Ungleichung) eine falsche Aussage."

8 Zahlenrätsel: Ein guter Einstieg für das Analyse-Synthese-Prinzip

Zahlenrätsel sind bekanntlich ein guter Nährboden für den Einstieg in das Betätigungsfeld: Lösen von Textaufgaben, da diese, Gott sei Dank, nichts mit der Außenwelt zu tun haben. Bei dieser Art der Aufgaben wird im Allgemeinen die mathematische Struktur deutlicher angesprochen als in anderen konstruierten Aufgaben, welche beispielsweise Bezug auf eine Alltagssituation nehmen.
Wir verkürzen an mancher Stelle die Art der Dokumentationsführung, um an anderer Stelle neue wesentliche Überlegungen zu platzieren, was aber nicht mit einer größeren Schrittweite im Denken verwechselt werden darf.

<u>Aufgabe 1</u>

Wie heißt die rationale Zahl?

Vermindert man 78 um die gesuchte Zahl und multipliziert die Differenz mit 3, so erhält man 213.

Analyse: Ziel: Aussage in Form einer möglichst „passenden" Gleichung ohne Variable.

<u>Start:</u> Wir nehmen als Lösung die Zahl <u>10</u> an. Die Testzahl wird durch einen Unterstrich markiert.

(Zwischenaufgabe: Formuliere unter Berücksichtigung der gemachten Annahme eine passende Umkehraufgabe!)

Mit der Testzahl formulieren wir einen Testantwortsatz und beziehen uns auf die Frage der Textaufgabe: Die rationale Zahl heißt <u>10</u>.

Mit unserer Testantwort führen wir einen Test am Text durch.

	Textpassagen	Mathematische Notationen	Termstrukturen/ Relationen
	Vermindert man 78 um die gesuchte Zahl ...	78 - <u>10</u> → 68	Differenz
	... und multipliziert die Differenz mit 3 ...	68*3 → 204	Produkt
<u>Ziel:</u>	... so erhält man 213.	**204 = 213**	Gleichung als falsche Aussage

Achtung: Bitte im Nachhinein den Zwischenkommentar (*) ab Seite 40 beachten!

Synthese: (Ziel: Aussage in Form einer „passenden” Gleichung mit einer Variablen)

Start: Aus der letzten falschen Aussage der Analyse gewinnen wir durch „Rückwärtsarbeiten” die Gleichung mit der Variablen x.

Startzustand:	204 = 213
68*3 → 204	(68*3) = 213
78 - 10 → 68	((78-**10**) *3) = 213
Wir „substituieren zurück”: 10 ← x und erhalten zunächst eine Aussageform. (Zwischenergebnisse werden durch entsprechende Klammerausdrücke ersetzt.)	((78- **x**) *3) = 213

Ziel: Um eine Aussage (hier wahre Aussage) zu erhalten, binden wir die Variable x an einen Quantifikator.

Es gibt eine rationale Zahl x, für die gilt: ((78-x)*3) = 213.

Mathematische Lösung: Ziel: Gleichung in x lösen

In DERIVE

```
#1:  (78 - x)·3 = 213
#2:  SOLVE((78 - x)·3 = 213, x)
#3:  [x = 7]
```

Test zum Grundbereich: Wir überprüfen, ob die DERIVE-Lösung ein Element unseres Grundbereiches ist.

$7 \in \mathbb{Q}$ wahre Aussage

Probe am Text: Mit der mathematischen Lösung führen wir eine Probe am Text durch, mit dem Ziel, den sachlichen Wahrheitsgehalt festzustellen.

Textpassagen	Mathematische Notationen
Vermindert man 78 um die gesuchte Zahl ...	78 - **7** → 71
... und multipliziert die Differenz mit 3...	71*3 → 213
... so erhält man 213	213 = **213** (wahre Aussage)

Antwortsatz: Wir formulieren im Stil unserer Testantwort den Antwortsatz.

Die gesuchte Zahl heißt 7.

(*) Didaktisch-methodischer Zwischenkommentar:

Der Übergang von der Analyse zur Synthese ist den Schülerinnen und Schülern als ein wichtiger Teilprozess des Mathematisierens bewusst zu machen. Dazu werden zunächst im Unterrichtsgespräch von mehreren Schülern Daten in Form einer Tabelle, wie im Folgenden angedeutet, am Tafelbild gesammelt.

<u>(I) Sammeln von Daten in einer Tabelle</u>

Schülerantwort A:	Schülerantwort B:	Schülerantwort C:	Schülerantwort D:	...
Annahme: <u>**10**</u> $\in\mathbb{Q}$	Annahme: <u>**15**</u> $\in\mathbb{Q}$	Annahme: <u>**50**</u> $\in\mathbb{Q}$	Annahme: <u>**-18**</u> $\in\mathbb{Q}$	...
204 = 213	189 = 213	84 = 213	288 = 213	...
68*3 = 213	63*3 = 213	28*3 = 213	96*3 = 213	...
((78-<u>**10**</u>) *3) = 213	(78-<u>**15**</u>) *3 = 213	(78-<u>**50**</u>)*3 = 213	(78-(<u>**-18**</u>))*3 = 213	...

<u>(II) Ordnen der Daten aus den diversen Analysen</u>

Wir klassifizieren auftretende Zahlen nach der Frage:

Welche Zahlen sind *unabhängig*, *abhängig* bzw. stellen einen *festen Parameter* der Textaufgabe dar?

Wir erkennen aus den verschiedenen Übersichten:

<u>Klasse der unabhängigen Zahlen:</u>

Die diversen angenommenen Werte: <u>10</u>; <u>15</u>; <u>50</u>; <u>-18</u> ; ... (sollten stets durch einen Unterstrich markiert sein) stellen die unabhängigen Zahlen dar und dienen als Platzhalter für die gesuchte Zahl. Jeder Schüler kann hier innerhalb des Grundbereiches frei wählen.

<u>Klasse der festen Parameter:</u>

Sind diejenigen Zahlen aus der letzten Zeile der Tabelle, die in jeder Schülerantwort vorkommen sollten. Es sind hier die Zahlen: 78; 3; 213. Sie sind alle direkt aus der Textaufgabe ablesbar und dienen als Platzhalter für die gegebenen Zahlen.

204 = **213**	189 = **213**	84 = **213**	288 = **213**	...
68***3** = **213**	63***3** = **213**	28***3** = **213**	96***3** = **213**	...
((**78**-<u>10</u>) ***3**) = **213**	(**78**-<u>15</u>) ***3** = **213**	(**78**-<u>50</u>)***3** = **213**	(**78**-(<u>-18</u>))***3** = **213**	...

<u>Klasse der abhängigen Zahlen:</u>

Alle restlichen Zahlen sind abhängig. Also 204; 68; 189; 63; 84; 28; 288; 96; ... Diese Zahlen sind Zwischen- oder Endergebnisse. Die Endergebnisse werden zum Vergleich mit einem bestimmten, festen Parameter der Textaufgabe herangezogen.

204 = 213	**189** = 213	**84** = 213	**288** = 213	...
68*3 = 213	**63***3 = 213	**28***3 = 213	**96***3 = 213	...

Die abhängigen Zahlen sollten in der letzten Zeile der Tabelle nicht mehr vorkommen:

((78-**10**) *3) = 213	(78-**15**) *3 = 213	(78-**50**)*3 = 213	(78-(**-18**))*3 = 213	...

(III) Der Übergang zur Synthese

Die Klasseneinteilung ist den Schülerinnen und Schülern bewusst zu machen, indem sie die gesammelten Daten selbstständig ordnen und ihre Einteilung im Einzelfall an ausgewählten Zahlen verteidigen. Erst diese Tätigkeit sichert die Generierung geeigneter variabler Terme ab, denn die unterschiedlichen Platzhalterfunktionen können nur induktiv von den Schülerinnen und Schülern erfasst und begründet werden.

Der Übergang der Analyse zur Synthese erfolgt dann so:

Die Klasse der unabhängigen Zahlen wird durch eine Variable gekennzeichnet.
Die festen Parameter der Textaufgabe werden in die Aussageform übernommen.
Die Interpretationen der einzelnen Elemente aus der Klasse der abhängigen Zahlen geben die Bedeutung aller Terme an.
Für die absichernde Wiederholung und innere Differenzierung sind den Schülerinnen und Schülern spezielle Übungen anzubieten. Beispielsweise in der Art:

a) Wenn die Schülerinnen und Schüler verstärkt lernen sollen, konzentriert am Text zu arbeiten:

Welche Textpassage wird durch den Teilterm (78- x) mathematisch beschrieben? Zitiere!

(Antwort: Vermindert man 78 um die gesuchte Zahl ...)

b) Wenn die Schülerinnen und Schüler verstärkt lernen sollen, neue Textaufgaben aus gegebenen Parametern zu formulieren:

Interpretiere den Term ((78 **- x**) * 3) verbal neu!

(Antwort: Von der Zahl 78 ziehe ich die gesuchte Zahl ab und das Ergebnis verdreifache ich.)

c) Wenn die Schülerinnen und Schüler verstärkt lernen sollen, eine Textaufgabe umzukehren:

Formuliere eine Umkehraufgabe!

(Antwort: Ich denke an die Zahl 20. Welche Zahl erhalte ich, wenn ich von der Zahl 78 meine ausgedachte Zahl subtrahiere und anschließend das Ergebnis mit 3 multipliziere?)

d) Wenn die Schülerinnen und Schüler verstärkt lernen sollen, Lösungen vorab grob zu schätzen:

Gib für die zu bestimmende Lösung eine grobe Schätzung an! Werte hierzu die Relationen in der letzten Zeile der Tabelle aus!

(Antwort: Ich schätze, dass die gesuchte Zahl in der Nähe der Zahl 10 liegt.)

——— Ende des Zwischenkommentars (*) ———

Aufgabe 2

Wie heißt die rationale Zahl?

Verringert man das Siebenfache einer Zahl um 13, so erhält man dasselbe, wie wenn man das Dreifache der gesuchten Zahl um 9 vergrößert.

Analyse: Ziel: Aussage in Form einer möglichst „passenden" Gleichung ohne Variable.

Start: Wir nehmen als Lösung die Zahl $\underline{5}$ an. Die Testzahl wird durch einen Unterstrich markiert.

Mit der Testzahl formulieren wir einen Testantwortsatz und beziehen uns auf die Frage der Textaufgabe: Die rationale Zahl heißt $\underline{5}$.

(Zwischenaufgabe: Formuliere unter Berücksichtigung der gemachten Annahme eine passende Umkehraufgabe!)

Mit unserer Testantwort führen wir einen Test am Text durch.

	Textpassagen	Mathematische Notationen	Termstrukturen/ Relationen
	Verringert man das Siebenfache einer Zahl um 13...	$7*\underline{5}-13 \rightarrow 22$	Differenz
	... das Dreifache der gesuchten Zahl um 9 vergrößert ...	$3*\underline{5}+9 \rightarrow 24$	Summe
Ziel:	... so erhält man dasselbe ...	22 = 24	Gleichung als falsche Aussage

Bitte **Übergang von der Analyse zur Synthese** induktiv gestalten (siehe Zwischenkommentar (*) auf Seite 40)!

Synthese: (Ziel: Aussage in Form einer „passenden" Gleichung mit einer Variablen)

Start: Aus der letzten falschen Aussage der Analyse gewinnen wir durch „Rückwärtsarbeiten" die Gleichung mit der Variablen x.

Startzustand: 22 = 24

$7*\underline{5}-13 \rightarrow 22$ und $3*\underline{5}+9 \rightarrow 24$ $\qquad (7*\underline{\mathbf{5}}-13) = (3*\underline{\mathbf{5}}+9)$

Wir „substituieren zurück": $\underline{5} \leftarrow x$ $\qquad (7*\mathbf{x}-13) = (3*\mathbf{x}+9)$
und erhalten zunächst eine Aussageform.
(Zwischenergebnisse werden durch entsprechende Klammerausdrücke ersetzt.)

Ziel: Um eine Aussage (hier wahre Aussage) zu erhalten, binden wir die Variable x an einen Quantifikator.

Es gibt eine rationale Zahl x, für die gilt: (7*x-13) = (3*x+9)

Mathematische Lösung: Ziel: Gleichung in x lösen.

In DERIVE:

```
#1:  7·x - 13 = 3·x + 9
#2:  SOLVE(7·x - 13 = 3·x + 9, x)
#3:  [x = 11/2]
```

Test zum Grundbereich: Wir überprüfen, ob die DERIVE-Lösung ein Element unseres Grundbereiches ist.

$11/2 \in \mathbb{Q}$ wahre Aussage

Probe am Text: Mit der mathematischen Lösung führen wir eine Probe am Text durch, mit dem Ziel, den sachlichen Wahrheitsgehalt festzustellen.

Textpassagen	Mathematische Notationen
Verringert man das Siebenfache einer Zahl um 13...	7*11/2-13 → 25,5
... das Dreifache der gesuchten Zahl um 9 vergrößert ...	3*11/2+9 → 25,5
... so erhält man dasselbe ...	25,5 = 25,5 (wahre Aussage)

Antwortsatz: Wir formulieren im Stil unserer Testantwort den Antwortsatz.

Die gesuchte Zahl heißt 11/2.

Aufgabe 3

Wie heißt die natürliche Zahl?

Die Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 9. Addiert man zu dieser Zahl 27, so erhält man eine Zahl mit denselben Ziffern, die aber in umgekehrter Reihenfolge stehen.

Analyse: Ziel: Aussage in Form einer möglichst „passenden" Gleichung ohne Variable

Start: Wir nehmen als Lösung die Zahl 45 an. Die Testzahl wird durch einen Unterstrich markiert.

(Zwischenaufgabe: Formuliere unter Berücksichtigung der gemachten Annahme eine passende Umkehraufgabe!)

Mit der Testzahl formulieren wir einen Testantwortsatz und beziehen uns auf die Frage der Textaufgabe: Die natürliche Zahl heißt <u>45</u>.

Mit unserer Testantwort führen wir einen Test am Text durch.

	Textpassagen	Mathematische Notationen	Termstrukturen/ Relationen
	... Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 9 ...	<u>4</u>+<u>5</u> → 9	Summe
	... addiert man zu dieser Zahl 27 ...	<u>45</u>+27 → 72	Summe
<u>Ziel:</u>	... so erhält man eine Zahl mit denselben Ziffern, die aber in umgekehrter Reihenfolge stehen ...	72 = 54	Gleichung als falsche Aussage

Bitte **Übergang von der Analyse zur Synthese** induktiv gestalten (siehe Zwischenkommentar im Dokument „Zahlenrätsel...” ab Seite 40)!

Synthese: (Ziel: Aussage in Form einer „passenden” Gleichung mit einer Variablen)

<u>Start:</u> Aus der letzten falschen Aussage der Analyse gewinnen wir durch „Rückwärtsarbeiten” die Gleichung mit der Variablen x.

<u>Startzustand:</u> 72 = 54

<u>45</u>+27 → 72

<u>4</u>*10+<u>5</u>*1 → 45 und <u>5</u>*10+<u>4</u>*1 → 54

Oder

<u>4</u>*10+(9-<u>4</u>)*1 → <u>45</u> und (9-<u>4</u>)*10+<u>4</u>*1 → 54

<u>4</u>*10+(9-**<u>4</u>**)*1+27 = (9-**<u>4</u>**)*10+**<u>4</u>***1

Einführung einer neuen Variablen z:
z*10+(9-**z**)*1 → x

Wir „substituieren zurück”: <u>4</u> ← z und erhalten zunächst eine Aussageform. **z***10+(9-**z**)*1+27 = (9-**z**)*10+**z***1

<u>Ziel:</u> Um eine Aussage (hier wahre Aussage) zu erhalten, binden wir die Variable x an einen Quantifikator.

Es gibt eine natürliche Zahl z, für die gilt:
z*10+(9-z)*1+27 = (9-z)*10+z*1

Mathematische Lösung: Ziel: Gleichung in x lösen.

```
#1:  z·10 + (9 - z)·1 + 27 = (9 - z)·10 + z·1
#2:  SOLVE(z·10 + (9 - z)·1 + 27 = (9 - z)·10 + z·1, z)
#3:  [z = 3]
```

Test zum Grundbereich: Wir überprüfen, ob die DERIVE-Lösung ein Element unseres Grundbereiches ist. $36 \in \mathbb{N}$ wahre Aussage

Probe am Text: Mit der mathematischen Lösung führen wir eine Probe am Text durch, mit dem Ziel, den sachlichen Wahrheitsgehalt festzustellen.

Textpassagen	Mathematische Notationen
... Quersumme einer zweiziffrigen Zahl ist 9 ...	$3+6 \rightarrow 9$
... addiert man zu dieser Zahl 27 ...	$36+27 \rightarrow 63$
... so erhält man eine Zahl mit denselben Ziffern, dir aber umgekehrter Reihenfolge stehen ...	$63 = 63$ (wahre Aussage)

Antwortsatz: Wir formulieren im Stil unserer Testantwort den Antwortsatz. Die natürliche Zahl heißt 36.

9 Altersrätsel

Sind solche antiquierten Aufgaben im 21 Jahrhundert nicht längst überholt? Wollten wir nicht unseren Schülerinnen und Schülern endlich mehr von den offeneren Aufgaben mit möglichst viel Realitätsnähe anbieten, damit Mathematiklernen mehr Sinn macht?

Unsere Antwort: Zweifelsohne. Wir möchten unseren Kritikern jedoch zu Bedenken geben, dass das Lösen offener Aufgaben das Lösen geschlossener Aufgaben umfasst. Denn spätestens beim Aufstellen des so genannten Ansatzes muss eine Schließung der Aufgabe durch die Hinzunahme zusätzlicher Annahmen vom Schüler selbst erfolgen. Es wäre im Sinne dieser notwendigen Veränderung hinsichtlich einer offeneren Aufgabenkultur unverantwortlich, wenn man in Zukunft geschlossene Aufgaben aus der Schulstube verbannen würde. Ob es sich beim Erhalt von geschlossenen Aufgaben unbedingt um Altersrätsel handeln muss, ist sicherlich kritisch zu prüfen. Ein Ansatzpunkt für eine solche Diskussion wäre zum Beispiel der nahezu fließende Übergang von den Zahlenrätseln zu den Altersrätseln, wobei der sachliche Bezug zu den Alterszahlen eine neue Qualität der Interpretationsfähigkeiten zur Folge hat.

Aufgabe 1

Vater und Sohn sind zusammen 48 Jahre alt. In 10 Jahren wird das Alter des Vaters 13/4 von dem des Sohnes betragen. Wie alt sind beide heute?

Analyse: Ziel: Aussage in Form einer möglichst „passenden" Gleichung ohne Variable.

Start: Wir nehmen als Lösung die Zahl $\underline{5}$ (Alter des Sohnes) an. Die Testzahl wird durch einen Unterstrich markiert.

Mit der Testzahl formulieren wir einen Testantwortsatz und beziehen uns auf die Frage der Sachaufgabe: Der Sohn ist heute $\underline{5}$ und der Vater 48-$\underline{5}$ Jahre alt.

Mit unserer Testantwort führen wir einen Test am Text durch.

Textpassagen	Mathematische Notationen	Termstrukturen/ Relationen
... zusammen 48 Jahre alt ...	$\underline{5}+48-\underline{5} \rightarrow 48$	Summe
... in 10 Jahren ...	Sohn: $\underline{5}+10 \rightarrow 15$ Vater: $48-\underline{5}+10 \rightarrow 53$	Summen
... wird das Alter des Vaters 13/4 von dem des Sohnes betragen ...	$13/4*15 \rightarrow 48{,}75$	Produkt
... in 10 Jahren wird das Alter des Vaters 13/4 von dem des Sohnes betragen ...	$48{,}75 = 53$	Gleichung als falsche Aussage

Ziel:

Bitte **Übergang von der Analyse zur Synthese** induktiv gestalten (siehe Zwischenkommentar im Dokument „Zahlenrätsel...“ auf Seite 40)!

Synthese: Ziel: Aussage in Form einer „passenden” Gleichung mit einer Variablen.

Start: Aus der letzten falschen Aussage der Analyse gewinnen wir durch “Rückwärts-arbeiten” die Gleichung mit der gesuchten Variablen x.

Startzustand:	48,75 = 53
13/4*15 → 48,75	13/4*15 = 53
48-5+10 → 53	13/4*15 = 48-5+10
5+10 → 15	13/4*(**5**+10) = 48-**5**+10
Wir „substituieren zurück”: 5 ← x und erhalten zunächst eine Aussageform.	13/4*(**x**+10) = 48-**x**+10

Ziel: Um eine Aussage (hier wahre Aussage) zu erhalten, binden wir die Variable x an einen Quantifikator.

Es gibt eine natürliche Zahl x, für die gilt: 13/4*(x+10) = 48-x+10

Mathematische Lösung: Ziel: Gleichung in x lösen.

In DERIVE:

#1: $\frac{13}{4}\cdot(x + 10) = 58 - x$

#2: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{13}{4}\cdot(x + 10) = 58 - x,\ x\right)$

#3: $[x = 6]$

Test zum Grundbereich: Wir überprüfen, ob die DERIVE-Lösung ein Element unseres Grundbereiches ist.

$6 \in \mathbb{N}$ wahre Aussage

Probe am Text: Mit der mathematischen Lösung führen wir eine Probe am Text durch, mit dem Ziel, den sachlichen Wahrheitsgehalt festzustellen. Dabei orientieren wir uns an dem Test am Text (siehe Analyse).

Textpassagen	Mathematische Notationen
... zusammen 48 Jahre alt ...	42+6→ 48
... in 10 Jahren ...	Vater: 52; Sohn: 16
... wird das Alter des Vaters 13/4 von dem des Sohnes betragen ...	13/4*16 = 52 (wahre Aussage)

Antwortsatz: Wir formulieren im Stil unserer Testantwort den Antwortsatz. — Der Sohn ist heute 6 und der Vater 42 Jahre alt.

Aufgabe 2

Andreas feiert seinen Geburtstag. Er wird gerade 24 Jahre alt. Von seinen Gästen wird Andreas gefragt, wie alt seine Schwester Klara jetzt sei. Andreas antwortet: „Ich bin jetzt doppelt so alt, wie meine Schwester Klara war, als ich so alt war, wie Klara ist.”

Wie alt ist Klara jetzt?

Analyse: Ziel: Aussage in Form einer möglichst „passenden” Gleichung ohne Variable.

Start: Wir nehmen als Lösung die Zahl 15 (Alter von Klara heute) an. Die Testzahl wird durch einen Unterstrich markiert.

Mit der Testzahl formulieren wir einen Testantwortsatz und beziehen uns auf die Frage der Textaufgabe: Klara ist heute 15 Jahre alt.

Mit unserer Testantwort führen wir einen Test am Text durch.

	Textpassagen	Mathematische Notationen	Termstrukturen/ Relationen
	... als ich so alt war wie Klara ist ...	15 (also vor 24-15 Jahren)	Zahl
	... ich bin jetzt doppelt so alt wie meine (doppelter Altersunterschied)	2*(24-15) → 18	Produkt
	... ich (24) bin jetzt doppelt so alt ...	24/2 → 12	Quotient
Ziel:		18 = 12	Gleichung als falsche Aussage

Bitte **Übergang von der Analyse zur Synthese** induktiv gestalten (siehe Zwischenkommentar im Dokument „Zahlenrätsel...” ab Seite 40)!

Synthese: Ziel: Aussage in Form einer „passenden” Gleichung mit einer Variablen.

Start: Aus der letzten falschen Aussage der Analyse gewinnen wir durch „Rückwärtsarbeiten” die Gleichung mit der Variablen x.

Startzustand:	18 = 12
24/2 → 12	18 = 24/2
2*(24-15) → 18	2*(24-15) = (24/2)

Wir „substituieren zurück“: 15 ← x und erhalten zunächst eine Aussageform.

2*(24-x) = 24/2

Ziel: Um eine Aussage (hier wahre Aussage) zu erhalten, binden wir die Variable x an einen Quantifikator.

Es gibt eine natürliche Zahl x, für die gilt: 2*(24-x) = 24/2.

Mathematische Lösung: Ziel: Gleichung in x lösen.

In DERIVE:

#1: $2\cdot(24-x) = \frac{24}{2}$

#2: $\text{SOLVE}\left(2\cdot(24-x) = \frac{24}{2}, x\right)$

#3: $[x = 18]$

Test zum Grundbereich: Wir überprüfen, ob die DERIVE-Lösung ein Element unseres Grundbereiches ist.

$18 \in \mathbb{N}$ wahre Aussage

Probe am Text: Mit der mathematischen Lösung führen wir eine Probe am Text durch, mit dem Ziel, den sachlichen Wahrheitsgehalt festzustellen.

Textpassagen	Mathematische Notationen
... ich bin jetzt doppelt so alt, wie meine Schwester Klara war	2*(24-18) (doppelter Altersunterschied)
... als ich so alt war wie Klara ist ...	18 (Andreas vor 6 Jahren) 12 (Klara vor 6 Jahren
	12 =12 wahre Aussage

Antwortsatz: Wir formulieren im Stil unserer Testantwort den Antwortsatz.

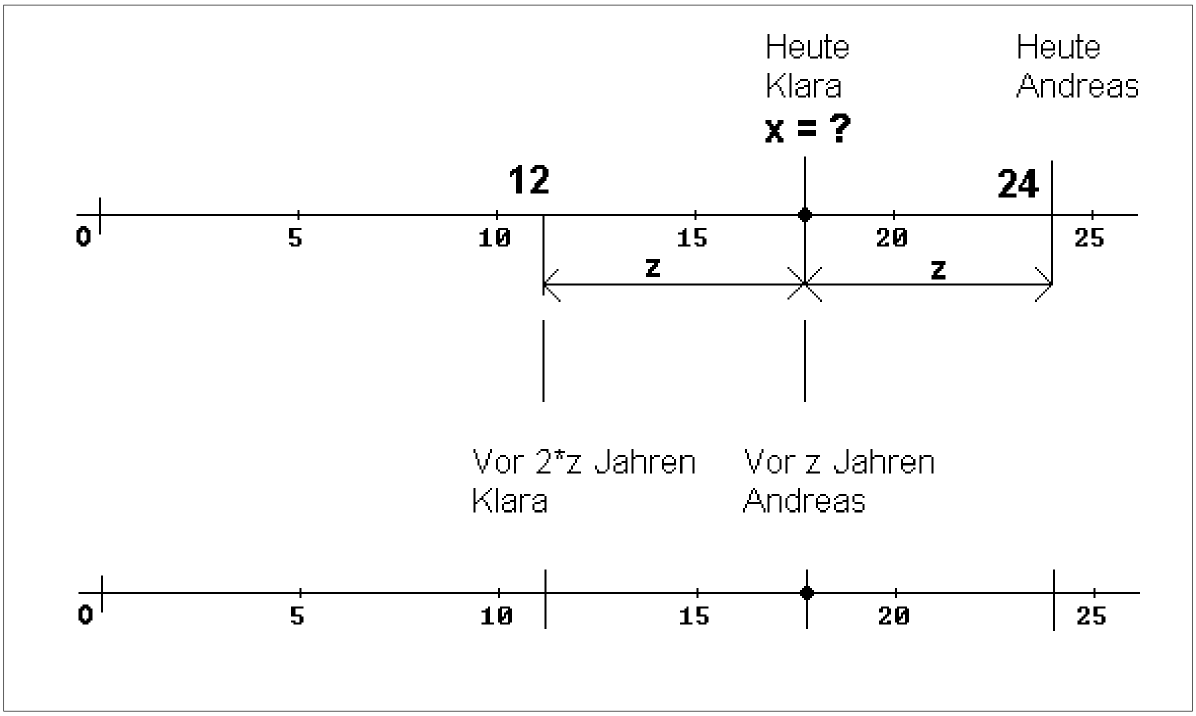
Klara ist heute 18 Jahre alt.

Als Alternative für die Bestimmung einer geeigneten Gleichung für die nicht ganz so einfache Altersaufgabe benutzen wir für die Altersentwicklung beider Geschwister einen Zahlenstrahl.

Wir erkennen aus der Skizze (siehe Figur 9.1):
Die gesuchte Zahl x liegt in der Mitte von 12 und 24. Also x = 18.

Die Aufgabe konnte auf Grund der Skizze so schnell gelöst werden. Doch wie hat sich die Skizze ergeben?

Wir analysieren schrittweise den Aufgabentext und stellen uns dazu wohl überlegte Fragen.



Figur 9.1

1. Schritt
   Worum geht es in der Aufgabe? Wer oder was spielt die Hauptrolle?

   Inhalt:
   Es geht um die Altersentwicklung von Andreas und seiner Schwester Klara.

2. Schritt
   Was ist gesucht? Wonach wird gefragt?

   Gesucht: Das heutige Alter von Klara.

3. Schritt
   Was ist gegeben? Welche Zahlen oder Größen (mit Einheiten) sind bekannt?

   Gegeben: Andreas wird heute 24 Jahre alt.

4. Schritt
   Was wird außerdem noch Wichtiges mitgeteilt? Welche Bedingungen werden an die gesuchte Zahl oder Größe gestellt?

   Bedingungen an das Gesuchte:
   (1) Andreas: „...als ich so alt war wie Klara ist."
   (2) Andreas: „Ich bin jetzt doppelt so alt, wie meine Schwester Klara war,..."

5. <u>Schritt</u>
Was lässt sich über das Gesuchte ohne (großen) Rechenaufwand schlussfolgern?

Aus den Bedingungen (1) und (2) des 4. Schrittes folgt: Klara ist jünger als Andreas (24) und älter als 12.

6. <u>Schritt</u>
Welche mathematischen Beziehungen bestehen zwischen den gegeben und gesuchten Angaben?

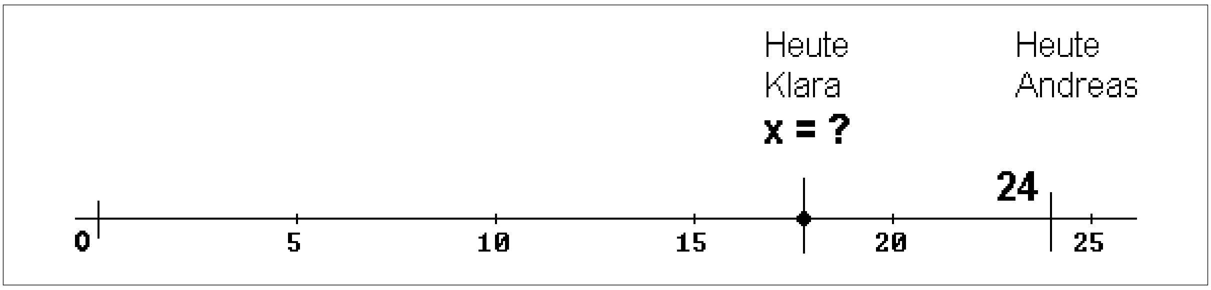
(1) Der Altersunterschied zwischen beiden Geschwistern ist immer gleich groß. Da wir ihn nicht kennen, nennen wir ihn einfach **z** Jahre. Aus dem 5. Schritt wissen wir bereits, dass gilt: $\mathbf{z}<12$ mit $z \in \mathbb{N}$.

(2) Zieht man vom jetzigen Alter (24) des Andreas z Jahre ab, so hat man das jetzige Alter von Klara. Anders ausgedrückt. Vor z Jahren war Andreas genauso alt wie Klara heute.

(3) Das Alter von Klara vor 2*z Jahren war 12 (“Ich (24) bin jetzt doppelt so alt, wie...”).

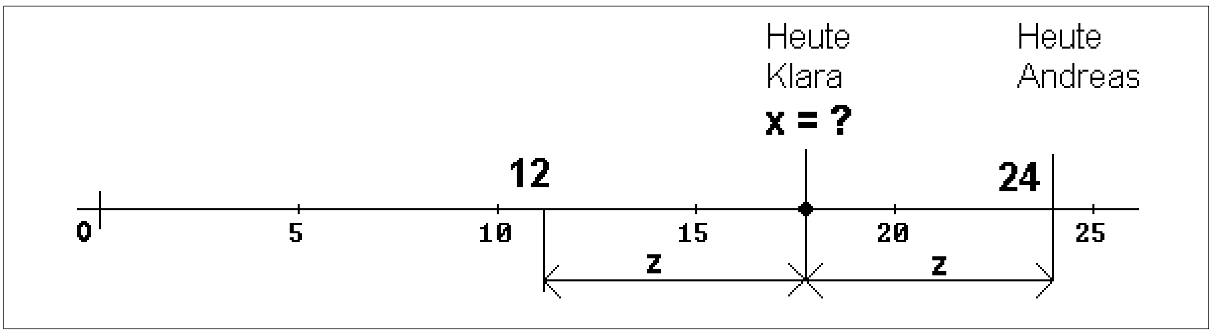
Jetzt sind wir in der Lage aus den bisher gewonnen Angaben und Folgerungen die Skizze, so wie wir sie bereits kennen, schrittweise aufzubauen. Dabei haben uns im besonderen Maße unsere Fragen geholfen, den Aufgabentext gezielt auszuwerten.

Nach Schritt 2



Figur 9.2

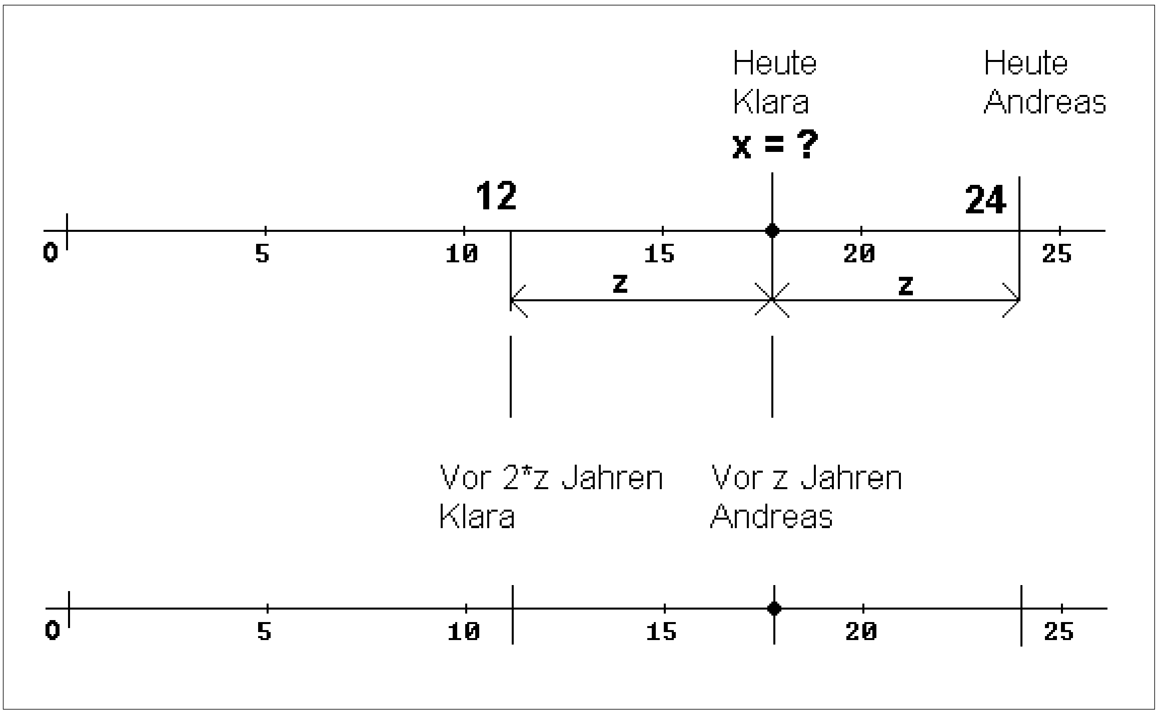
Nach Schritt 6/2



Figur 9.3

Aus einer guten Skizze, wie der Letzten, sind wir auch in der Lage wieder eine passende Gleichung zu finden.

Nach Schritt 6/3



Figur 9.4

Wenn x das heutige Alter von Klara beschreibt und wir setzen z := 24 - x, so gilt nach der Skizze: 12 + 2*z = 24 bzw. nach „Rücksubstitution“: 12 + 2*(24 - x) = 24.

<u>Übung:</u>

a) Beachte die Klammern und löse die Gleichung 12 + 2*(24 - x) = 24 nach x von Hand!
b) Sind die beiden Gleichungen 12 + 2*(24 - x) = 24 und 2*(24 - x) = 12 äquivalent? Begründe!

10 Zur Sache: Arbeit

Auch hier ist die Qualität des sinnerfassenden Lesens für die erfolgreiche Bewältigung der Gleichungsbestimmung von ausschlaggebender Bedeutung. Ein Teilziel ist dann wieder das Erkennen und Formulieren elementarer funktionaler Zusammenhänge (z. B.: Aushub - Arbeitszeit - Volumen). Doch für viele Schüler stellt sich hier im Gegensatz zu den bisherigen Textaufgaben eine weitere Hürde auf, nämlich quantifizierte Textbausteine als bestimmte Größenarten zu identifizieren.

<u>Aufgabe</u>

Zwei Löffelbagger mit unterschiedlicher Leistung werden zum Ausheben einer Baugrube mit einem Volumen von 18000 m^3 eingesetzt. Der leistungsstärkere Bagger hebt pro Stunde 180 m^3 mehr aus als der Kleinere. Nachdem der Größere 14 Stunden und der Kleinere 25 Stunden ununterbrochen gearbeitet haben, ist die Baugrube vollständig ausgehoben. Wieviel Erdstoff hob jeder Bagger pro Stunde aus? Löse die Sachaufgabe mit Hilfe einer Gleichung!

Wir beginnen mit einem gezielten Ausfragen der Sachaufgabe und protokollieren unsere Antworten.

1. Worum geht es in der Aufgabe? Wer oder was spielt die Hauptrolle?
2. Was ist gesucht? Wonach wird gefragt?
3. Was ist gegeben? Welche Zahlen oder Größen (mit Einheiten) sind bekannt?
4. Was wird außerdem noch wichtiges mitgeteilt? Welche Bedingungen werden an die gesuchte Zahl oder Größe gestellt?
5. Was lässt sich über das Gesuchte ohne (großen) Rechenaufwand schlussfolgern?
6. Welche mathematischen Beziehungen bestehen zwischen den gegeben und gesuchten Angaben?

Zu 1.)	**Gegenstand:**	Zwei Löffelbagger heben eine Baugrube aus.
Zu 2.)	**Gesucht:**	Aushub von beiden Baggern in m^3/h.
Zu 3.)	**Gegeben:**	1) Volumen der Baugrube: 18000 m^3;
		2) der leistungsstärkere Bagger hebt pro Stunde 180 m^3 mehr aus;
		3) großer Bagger 14 Stunden;
		4) kleiner Bagger 25 Stunden.
Zu 4.)	**Bedingungen**:	Bereits alle genannt.
Zu 5.)	**Schätzungen:**	Der kleinere Bagger ist leistungsschwächer als der Größere. Demzufolge wird der Größere auch einen größeren Aushub in m^3/h leisten.

Zu 6.) **Didaktische Erläuterungen zur 6. Teilaufgabe:**

Das Aufdecken der im Text beschriebenen mathematischen Beziehungen stellt eine Komplexaufgabe dar, die durch eine Zerlegung in bekannte Teilaufgaben gelöst werden kann. Meistens bereitet aber den

Schülerinnen und Schülern gerade eine solche Zerlegung erhebliche Schwierigkeiten. Um diese Schwierigkeiten zu minimieren, fordern wir die Schüler vorerst auf, eine „Umkehrung der Sachaufgabe" vorzunehmen, welche mit der Annahme einer fiktiven Lösung beginnt und mit dem Term zur Berechnung einer bekannten Größe endet. Wir erläutern diese Idee am Beispiel der Baggeraufgabe.

Umkehraufgabe:

Es wird angenommen, dass wir bereits den Aushub (in m^3/h) des kleinen Baggers kennen und fragen nach dem Volumen der auszuhebenden Baugrube. Alle anderen Angaben werden aus der eingangs gestellten Sachaufgabe übernommen.

Struktur der Umkehraufgabe:

Gegeben: Aushub des kleinen Baggers in m^3/h.
Gesucht: Volumen der auszuhebenden Baugrube in m^3.

Annahme: Der kleine Bagger schafft pro Stunde $\underline{500}$ m^3 Erdstoff.
(Hinweis: Die fiktive Annahme wird immer als unterstrichener Wert erscheinen.)

Die Zerlegung in Teilaufgaben beginnt mit der Annahme und endet mit dem Volumen der auszuhebenden Baugrube. Dabei benutzen wir bewusst die „wenn-dann"-Formulierung. Die Antworten werden in einer operativen Kurzform als Zuordnungen aufgeschrieben.

(Hinweis: Der kursive Satzteil wird den Schülern als Lückentext angeboten.)

(1) **Wenn** der kleine Bagger pro Stunde $\underline{500}$ m^3 Erdstoff aushebt, wie viel schafft dieser **dann** in 25 Stunden?

$$\underline{500}\ m^3/h \xrightarrow{*25h} 12500\ m^3$$

(2) **Wenn** der kleine Bagger pro Stunde $\underline{500}$ m^3 Erdstoff aushebt, wie viel hebt **dann** *der große Bagger pro Stunde an Erdstoff aus?*

$$\underline{500}\ m^3/h \xrightarrow{+180m^3/h} 680\ m^3/h$$

(3) **Wenn** der große Bagger pro Stunde 680 m^3 Erdstoff aushebt, wie viel schafft dieser **dann** *in 14 Stunden?*

$$680\ m^3/h \xrightarrow{*14h} 9520\ m^3$$

(4) **Wenn** der kleine Bagger in 25 h 12500 m^3 Erdstoff und der große Bagger in 14 h 9520 m^3 Erdstoff ausheben, wie viel m^3 Erdstoff heben **dann** *beide zusammen aus?*

$$12500\ m^3 \xrightarrow{+9520m^3} 22020\ m^3$$

(Hinweis: Selbstverständlich auf Grund der Kommutativität der Addition gleichwertig mit:

$9520\ m^3 \xrightarrow{+12500 m^3} 22020\ m^3$.)

Es schließen sich nun Überlegungen zum sinnvollen Verketten der einzelnen aufgeschriebenen operativen Notationen an. Man beginnt zunächst mit einem Sammeln, setzt dann mit einem Ordnen und Verketten in Abfolge fort und baut dann mit Hilfe einer unabhängigen Variablen einen zweidimensionalen Rechenbaum auf.

Sammeln der operativen Zuordnungen:

Aus (1): $\underline{500}\ m^3/h \xrightarrow{*25h} 12500\ m^3$

Aus (2): $\underline{500}\ m^3/h \xrightarrow{+180 m^3/h} 680\ m^3/h$

Aus (3): $680\ m^3/h \xrightarrow{*14h} 9520\ m^3$

Aus (4): $12500\ m^3 \xrightarrow{+9520 m^3} 22020\ m^3$

Ordnen und Verketten der operativen Zuordnungen:

$\underline{500}\ m^3/h \xrightarrow{*25h} 12500\ m^3$

$\underline{500}\ m^3/h \xrightarrow{+180 m^3/h} 680\ m^3/h \xrightarrow{*14h} 9520\ m^3$

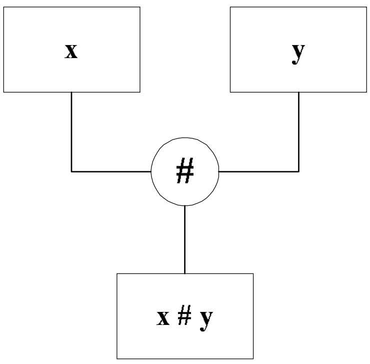
$22020\ m^3$

Aufbau eines zweidimensionalen Rechenbaums:

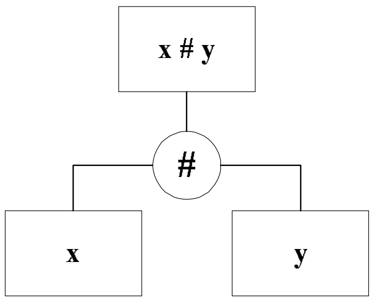
Die in Zeilen geschriebenen operativen Zuordnungen können in zweidimensionale, zweistellige Rechenbausteine umkodiert werden.

Aus dieser allgemeinen operativen Zuordnung:

$x \xrightarrow{\#y} x\ \#\ y$ wird nach dem Umkodieren:

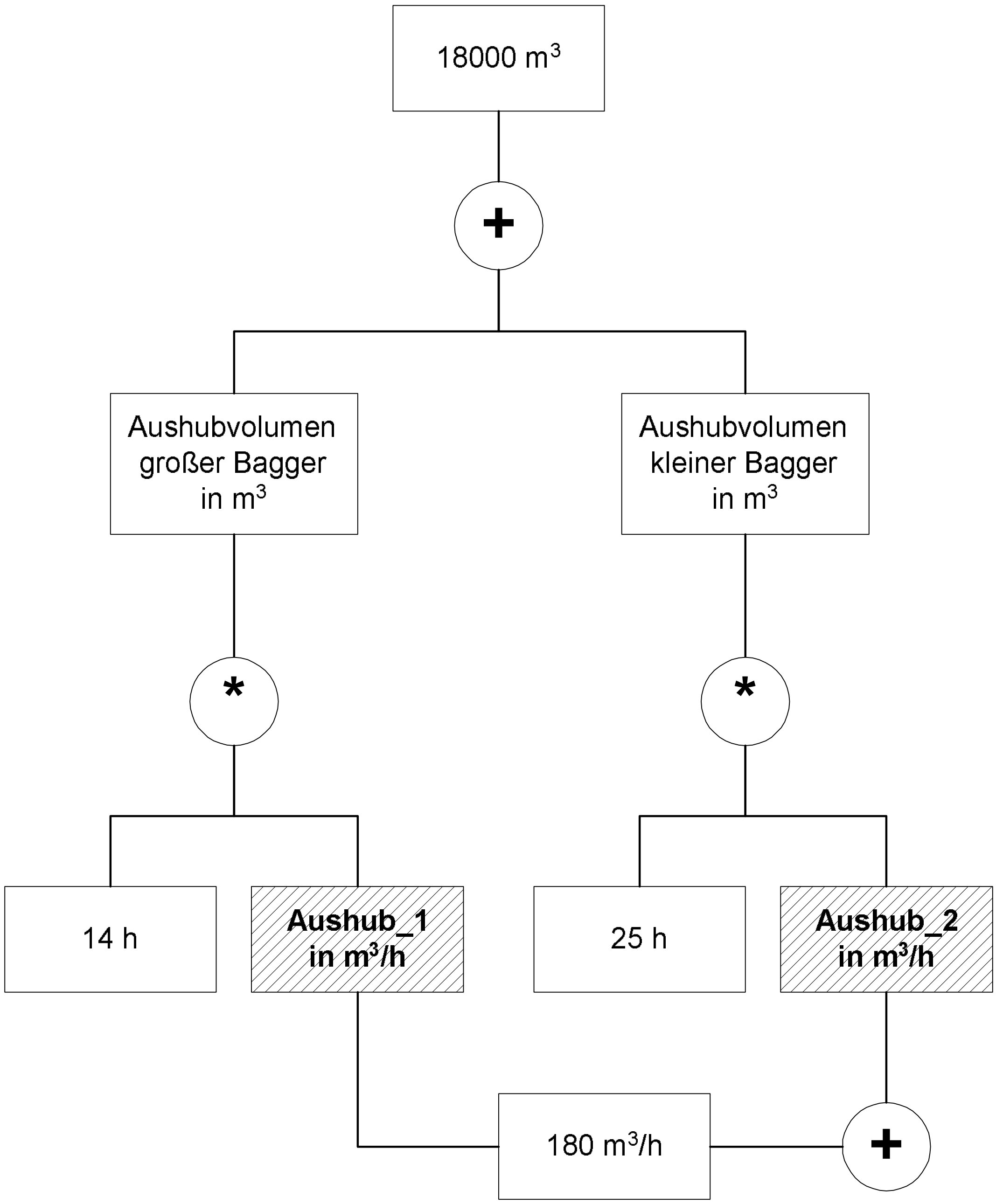


oder:



Mit der Einführung entsprechender Variablen und der Korrektur des Volumenwertes für die Baugrube entsteht dann der Rechenbaum.

Mathematische Beziehungen
a) Wir gehen davon aus, dass die Lösung bereits vorliegt. Lese von unten nach oben.



(Schraffur deutet auf gesuchte Größen)

Mathematische Beziehungen
b) in Form einer Tabelle (Alternative zum Rechenbaum)

	Aushub in m^3/h	Zeit in h	Volumen in m^3
Großer Bagger	x+180	14	(x+180)*14
Kleiner Bagger	x	25	x*25
Gesamt			**18000**

Nun sind wir in der Lage, Aussagen in Form von Gleichungen aufzustellen. Wir haben wieder zwei Optionen, zum einen setzen wir für x bzw. für Aushub_2 konkrete Zahlenwerte in die Tabelle bzw. in den Rechenbaum ein und überprüfen den Wahrheitsgehalt der beschriebenen Beziehungen oder wir binden zum anderen die jeweilige Unbekannte (Variable) an einen Quantifikator und erhalten auch so eine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist.

Testverfahren 1: Einsetzen konkreter Zahlenwerte in die Tabelle:

Wir geben beispielsweise vor **x:=300** m^3/h und werten die Tabelle aus:

	Aushub in m^3/h	Zeit in h	Volumen in m^3
Großer Bagger	300+180	14	(300+180)*14
Kleiner Bagger	300	25	300*25
Gesamt			**18000**

	Aushub in m^3/h	Zeit in h	Volumen in m^3
Großer Bagger	**480**	14	6720
Kleiner Bagger	**300**	25	7500
Gesamt			**18000**

6720 + 7500 = 14220
und
14220 = 18000
falsche Aussage

Testverfahren 2: Einsetzen konkreter Zahlenwerte in den Rechenbaum:

Wir geben beispielsweise vor **Aushub_2:=300** m^3/h und werten den Rechenbaum *von unten nach oben* schrittweise aus:

1. Schritt: **Aushub_2:=300**
2. Schritt: Aushub_1=300+180 (=480)
3. Schritt: Aushubvolumen_großer_Bagger=480*14 (=6720)
4. Schritt: Aushubvolumen_kleiner_Bagger=300*25 (=7500)
5. Schritt: Summe: 480*14+300*25 (=14220)

Wir stellen fest: **14220 = 18000 falsche Aussage**.

Ganz gleich, welches Testverfahren wir auch bevorzugen, in beiden Darstellungen erhalten wir die gleiche falsche Aussage: **14220 = 18000**

Denken wir uns andere Zahlenwerte für x bzw. für Aushub_2 aus, so erfolgt das Testen am Rechenbaum oder an der Tabelle solange, bis wir jene Werte für x bzw. für Aushub_2 gefunden haben, die eine wahre Aussage ergeben. Ein sehr unbequemer Weg, weil er möglicherweise nie enden wird.

Wenden wir uns der zweiten Option zu, der Bindung der Variablen an einen Quantifikator und nutzen jene Überlegungen aus der ersten Option, die uns zu der bekannten falschen Aussage geführt hat.

Start der Synthese: 14220 = 18000 falsche Aussage

Die Zahlen 18000 und 14220 sind unterschiedlicher Herkunft. 14220 hat sich aus den gefundenen Beziehungen errechnet und die Zahl 18000 ist eine Angabe aus der gestellten Aufgabe.

Verfolgen wir die rechnerische Entstehung von 14220 zurück.

$$\begin{aligned} 14220 &= 6720 + 7500 \\ &= 480*14 + \underline{300}*25 \\ &= (\underline{\mathbf{300}}+180)*14 + \underline{\mathbf{300}}*25 \end{aligned}$$

Wir sind mit der Zahl <u>300</u> an den Anfang der Ersetzung für x bzw. für Aushub_2 angelangt. Nun tauschen wir die *Testzahl* <u>300</u> wieder gegen den Buchstaben x bzw. für die Wortvariable Aushub_2. Hier stellvertretend die „Rücksetzung" mit x.

$$\begin{aligned} 14220 &= 6720 + 7500 \\ &= 480*14 + \underline{\mathbf{300}}*25 \\ &= (\mathbf{x}+180)*14 + \mathbf{x}*25 \end{aligned}$$

Aus der falschen Aussage erhalten wir zunächst die Aussageform (weder wahr noch falsch) **(x+180) *14 + x*25 = 18000**. Um daraus eine Aussage zu erhalten, fügen wir den Quantifikator: **Es gibt eine** ein und binden so die Variable x an den Quantifikator.

Ziel der Synthese: Es gibt eine positive rationale Zahl x für die gilt:
(x+180) *14 + x*25 = 18000

Um den Wahrheitsgehalt feststellen zu können, arbeiten wir in DERIVE und lösen zunächst die Gleichung in x.

SOLVE((x+180) * 14 + x * 25 = 18000, x)

Nach Anwenden des Befehls **Vereinfachen** erhalten wir als mathematische Lösung:

$$\left[x = \frac{5160}{13}\right]$$

Diesen mathematischen Wert setzen wir in die Gleichung für x ein:

$$\left(\frac{5160}{13}+180\right)*14+\frac{5160}{13}*25=18000$$

Vereinfachen wir wieder, so ergibt sich der Wahrheitswert (in englisch):

true

(true entspricht wahr)

Was haben wir mit dieser Computerunterstützung gezeigt?

Wir wissen die Zahl 5160/13 ist die Lösung der Gleichung (x+180) * 14 + x * 25 = 18000.

Der computerermittelte Wahrheitswert **true** ist aber nicht der Wahrheitswert der Aussage: **Es gibt eine positive rationale Zahl x für die gilt: (x+180) * 14 + x * 25 = 18000**, sondern lediglich die (reelle) Lösung jener Gleichung, die sich aus der Anwendung des SOLVE-Befehls ergab. Also bleibt uns die Untersuchung des Wahrheitsgehaltes bezüglich des vorher vereinbarten Grundbereiches selbst vorbehalten.

Die positive Zahl 5160/13 ist ein Bruch und stellt demzufolge eine positive rationale Zahl dar, die nach Austausch mit dem Buchstaben x die Gleichung (x+180) * 14 + x * 25 = 18000 in eine wahre Aussage überführt, wovon wir uns in DERIVE oder auch durch händisches Nachrechnen jederzeit überzeugen können. Die obige Aussage ist also wahr.

Nun suchen wir durch *sinnvolles Runden* eine *praktische Lösung* für unsere Sachaufgabe.

(1) Schritt: Approximieren in DERIVE
Wir approximieren in DERIVE den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch.
5160/13 ≈ 396.923.

Damit haben wir durch *computerunterstütztes Runden* zwar einen Näherungswert für die mathematische Lösung 5160/13 erhalten, aber nicht im angemessenen Sinne des Sachverhaltes gerundet.

(2) Schritt: Runden im Sinne des Sachverhaltes.
Die Vorgabe von 18000 m^3 bestimmt im wesentlichen den Grad der Rundung.
Wir runden auf Einer:
396.923 » <u>397</u> (vorläufige praktische Lösung)

(3) Schritt: Testen der vorläufigen praktischen Lösung durch eine Probe am Text.

Textpassage / Folgerungen	**Teilergebnisse/Gesamtergebnis**
... der kleinere 25 Stunden	25 h
Hubvolumen des kleinen Baggers	25 h*397 m^3/h = 9925 m^3
... leistungsstärkere Bagger hebt pro Stunde 180 m^3 mehr aus als der kleinere.	397 m^3/h+180 m^3/h = 577 m^3/h
Hubvolumen des großen Baggers	14 h* 577 m^3/h = 8078 m^3
Gesamtvolumen beider Bagger	9925 m^3+8078 m^3 = 18003 m^3
Vorgabe	18000 m^3
Vergleich	18003 m^3 $\approx$ 18000 m^3

Antwortsatz: Der kleinere Bagger schafft pro Stunde 397 m^3 und der große 577 m^3.

11 Zur Sache: Bewegungen

Wir setzen hier die Kenntnis des Weg-Zeit-Gesetzes der geradlinig gleichförmigen Bewegung voraus.

Aufgabe:

Zwei Läufer starten gleichzeitig auf einer kreisförmigen Laufbahn von 600 m Länge. Der eine legt die 10000 m in 42 Minuten zurück, der andere in 38 Minuten. Es wird angenommen, dass beide Läufer während der gesamten Laufstrecke eine nahezu konstante Laufgeschwindigkeit haben. Wie viele Minuten nach dem Start hat der schnellere den anderen zum ersten mal überrundet?

Wir beginnen mit einem gezielten Ausfragen der Sachaufgabe und protokollieren unsere Antworten.

1. Worum geht es in der Aufgabe? Wer oder was spielt die Hauptrolle?
2. Was ist gesucht? Wonach wird gefragt?
3. Was ist gegeben? Welche Zahlen oder Größen (mit Einheiten) sind bekannt?
4. Was wird außerdem noch wichtiges mitgeteilt? Welche Bedingungen werden an die gesuchte Zahl oder Größe gestellt?
5. Was lässt sich über das Gesuchte ohne (großen) Rechenaufwand schlussfolgern?
   Welche mathematischen Beziehungen bestehen zwischen den gegeben und gesuchten Angaben?

Zu 1.) **Gegenstand:** Zwei Läufer legen 10000 m im Wettstreit zurück.

Zu 2.) **Gesucht**: Wie viele Minuten nach dem Start... zum ersten mal überrundet?

Zu 3.) **Gegeben:** Zwei Läufer,
Laufbahn von 600 m,
10000 m in 42 min,
10000 m in 38 min

Zu 4.) **Bedingungen:**
Es wird angenommen, dass beide Läufer während der gesamten Laufstrecke eine nahezu konstante Laufgeschwindigkeit haben.

Zu 5.) **Schätzungen:** Die gesuchte Zeit ist positiv und höchstens 38 min.

Zu 6.) **Mathematische Beziehungen:**

Wir gehen davon aus, dass die Lösung für die gesuchte Zeit bereits bekannt ist.
Es gilt das Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung: **s(t) = v*t**

Zahlenbeispiele im simulierten Experiment:

Wir beginnen mit der Testzeit von **17** min.

A	**Zeit** **t in min**	**Geschwindigkeit** **v in m/min**	**Rechnung** **v*t in min**	**zurückgelegter** **Weg in m**
Läufer 1	**17**	10000/42	10000/42***17**	4048
Läufer 2	**17**	10000/38	10000/38***17**	4474

Auswertung A: Der Wegunterschied beträgt 4474 m **-** 4048 m = 426 m < 600 m. Es sollte Gleichheit gelten!

Folgerung A: Die Testzahl **17** ist zu klein gewählt.

Wir testen jetzt mit: **30** min.

B	**Zeit** **t in min**	**Geschwindigkeit** **v in m/min**	**Rechnung** **v*t in min**	**zurückgelegter** **Weg in m**
Läufer 1	**30**	10000/42	10000/42***30**	7143
Läufer 2	**30**	10000/38	10000/38***30**	7895

Auswertung B: Der Wegunterschied beträgt 7895 m **-** 7143 m = 752 m > 600 m. Es sollte Gleichheit gelten!

Folgerung B: Die Testzahl **30** ist zu groß gewählt.

Schlussfolgerungen:

(1) Aus beiden Teilexperimenten können wir eine bessere Abschätzung für unsere Lösung unterbreiten: Wenn x die gesuchte Zeit in Minuten darstellt, dann gilt:
17 min < x < 30 min.

(2) Die Werte **17** und **30** nehmen in den Tabellen A und B eine Platzhalterfunktion ein. Wir ersetzen in einer der beiden Tabellen diesen Platzhalter durch den Buchstaben x.

Zeit **t in min**		**Geschwindigkeit** **v in m/min**	**zurückgelegter Weg** **v*t in m**
Läufer 1	**x**	10000/42	10000/42***x**
Läufer 2	**x**	10000/38	10000/38***x**

Der Wegunterschied berechnet sich aus der Differenz: 10000/38***x -** 10000/42***x**.
Wir fordern für den Wegunterschied: 10000/38***x -** 10000/42***x** = 600

Wir formulieren eine Aussage mit der Variablen x:

Es gibt eine positive rationale Zahl x: 10000/38***x -** 10000/42***x** = 600

Bedeutung von x: Die Zahl x gibt die Zeit in Minuten für das erste Überrunden an.

Um den Wahrheitsgehalt der letzten Aussage feststellen zu können, arbeiten wir in DERIVE und lösen zunächst die Gleichung in x.

SOLVE(10000/38*x - 10000/42*x = 600, x)

Nach Anwenden des Befehls **Vereinfachen** erhalten wir $\left[x = \frac{1197}{50} \right]$.

Diesen mathematischen Wert setzen wir in die Gleichung für x ein:

$$\frac{10000}{38} * \frac{1197}{50} - \frac{10000}{42} * \frac{1197}{50} = 600$$

Vereinfachen wir wieder, so ergibt sich der Wahrheitswert (in englisch): **true**

Der computerermittelte Wahrheitswert **true** ist aber nicht der Wahrheitswert der Aussage: **Es gibt eine positive rationale Zahl x:** 10000/38 * **x -** 10000/42 * **x** = 600, sondern lediglich die (reelle) Lösung jener Gleichung, die sich aus der Anwendung des **SOLVE**-Befehls ergab. Also bleibt uns die Untersuchung des Wahrheitsgehaltes bezüglich des vorher vereinbarten Grundbereichs selbst vorbehalten.

Die Bruchzahl 1197/50 stellt eine positive rationale Zahl dar, die nach Austausch mit dem Buchstaben x die Gleichung 10000/38 * x - 10000/42 * x = 600 in eine wahre Aussage überführt, wovon wir uns in DERIVE oder auch durch händisches Nachrechnen jederzeit überzeugen können. Die obige Aussage ist also wahr.

Nun suchen wir durch *sinnvolles Runden* eine *praktische Lösung* für unsere Sachaufgabe.

(1) Schritt: Approximieren in DERIVE
Wir approximieren in DERIVE den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch.

$1197/50 \approx 23.94$.

Damit haben wir durch *computerunterstütztes Runden* zwar einen Näherungswert für die mathematische Lösung 1197/50 erhalten, aber nicht im angemessenen Sinne des Sachverhaltes gerundet.

(2) Schritt: Runden im Sinne des Sachverhaltes
Wenn auch heute die Möglichkeiten einer sehr genauen Zeitmessung gegeben sind, wäre es unter Beachtung der Textangabe : *„…beide Läufer während der gesamten Laufstrecke eine nahezu konstante Laufgeschwindigkeit haben*" ein grober Fehler, wenn ein sinnvolles Runden nicht vorgenommen würde.
Wir runden auf die Einer-Stelle: $23{,}94 \approx 24$.

(3) Schritt: Testen der vorläufigen praktischen Lösung durch eine Probe am Text

Textpassage / Folgerungen	**Teilergebnisse/Gesamtergebnis**
Läufer 1: 10000 m in 42 Minuten ist gleich bedeutend mit 238 m in 1 Minute als auch mit 5712 m in 24 Minuten	In 24 Minuten legt Läufer 1 einen Weg von 5712 m zurück.
Läufer 1: 10000 m in 38 Minuten ist gleich bedeutend mit 263 m in 1 Minute als auch mit 6312 m in 24 Minuten	In 24 Minuten legt Läufer 2 einen Weg von 6312 m zurück.
Wegunterschied: 6312 m - 5712 m	24 Minuten nach dem Start haben die beiden Läufer zum ersten mal einen Wegunterschied von 600 m.

Ziel: Antwortsatz

Nach 24 Minuten hat der schnellere Läufer den langsameren Läufer zum ersten Mal überrundet.

Übung:

Erkundige dich, wie lang Laufbahnen auf einem Sportplatz wirklich sind und ersetze im Aufgabentext die angegebenen 600 m durch die reale Größe in Form eines Parameters.
Wie lautet dann die Gleichung bei gleicher Fragestellung?
Gib eine parametrisierte Lösung an und interpretiere die mathematische Lösung für verschiedene Laufbahnlängen.

12 ZUR SACHE: MISCHUNG

Wir setzen hier die Kenntnis des Gesetzes zur Erhaltung der Massen in geschlossenen Systemen voraus.

Aufgabe

Wie viel Gramm einer 92 %-igen Schwefelsäure muß man mit Wasser mischen, um eine 600 Gramm schwere 15 %-ige Schwefelsäure herstellen zu können.

Wir beginnen mit einem gezielten Ausfragen der Sachaufgabe und protokollieren unsere Antworten.

1. Worum geht es in der Aufgabe? Wer oder was spielt die Hauptrolle?
2. Was ist gesucht? Wonach wird gefragt?
3. Was ist gegeben? Welche Zahlen oder Größen (mit Einheiten) sind bekannt?
4. Was wird außerdem noch wichtiges mitgeteilt? Welche Bedingungen werden an die gesuchte Zahl oder Größe gestellt?
5. Was lässt sich über das Gesuchte ohne (großen) Rechenaufwand schlussfolgern?
6. Welche mathematischen Beziehungen bestehen zwischen den gegeben und gesuchten Angaben?

Zu 1.) **Gegenstand:** Schwefelsäure und Wasser werden gemischt.

Zu 2.) **Gesucht:** Wie viel Gramm einer 92 %-igen Schwefelsäure...?

Zu 3.) **Gegeben:** 92 %-ige Schwefelsäure,
Wasser,
600 Gramm schwere 15 %-ige Schwefelsäure

Zu 4.) **Bedingungen:** Vor und nach dem Mischen bleibt die Masse erhalten (Massenerhaltungsgesetz).

Zu 5.) **Schätzung:** Wir erwarten von der 92 %-igen Schwefelsäure eine Masse, die etwas größer sein wird als 90 g. (15 % * 600 g = 90 g)

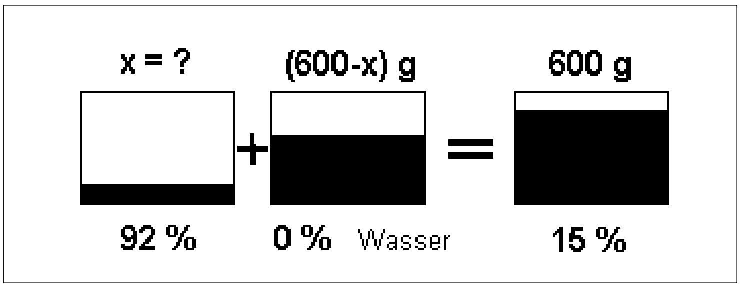
Zu 6.) **Mathematische Beziehungen:**

Wir gehen davon aus, dass die Lösung (gesuchter Massenwert) bereits vorliegt.
Mathematische Beziehungen in Form einer physikalischen Gleichung, einer Skizze und Tabellen:

Gleichung:

$$\textbf{Masse}_{\text{(aller an der Mischung beteiligten Produkte)}} = \textbf{Masse}_{\text{(des Mischungsproduktes)}}$$

Skizze:



Figur 12. 1

Zahlenbeispiele im Simulationsexperiment:

Wir wählen für die Masse der 92 %-igen Schwefelsäure: **95 g** > 90 g

A	Masse in Gramm	Säureanteil in %	Säuremasse in Gramm
1. Gefäß	**95**	92	0.92 * **95** *(= 87,4)*
2. Gefäß	600-**95** *(= 505)*	0	(600-**95**) * 0,00 *(= 0)*
Mischung	600	15	0.15 * 600 *(= 90)*

Auswertung A: 87,4 g < 90 g (Es sollte Gleichheit gelten!)

Neue Wahl für die Masse der 92 %-igen Schwefelsäure: **100 g** > 95 g

B	Masse in Gramm	Säureanteil in %	Säuremasse in Gramm
1. Gefäß	**100**	92	0.92 * **100** *(= 92)*
2. Gefäß	600-**100** *(= 500)*	0	(600-**100**) * 0 *(= 0)*
Mischung	600	15	0.15 * 600 *(= 90)*

Auswertung B: 92 g > 90 g (Es sollte Gleichheit gelten!)

Schlussfolgerungen:

(1) Aus beiden Teilexperimenten können wir eine bessere Abschätzung für unsere Lösung unterbreiten: Wenn x die gesuchte Masse der 92 %-igen Schwefelsäure darstellt, dann gilt: 90 g < x < 100g.

(2) Die Werte **95** und **100** nehmen in den Tabellen A und B eine Platzhalterfunktion ein. Wir ersetzen in einer der beiden Tabellen diesen Platzhalter durch den Buchstaben x.

	Masse in Gramm	**Säureanteil in %**	**Säuremasse in Gramm**
1. Gefäß	**x**	92	0.92 * **x**
2. Gefäß	600-**x**	0	(600-**x**) * 0 (0)
Mischung	600	15	0.15 * 600 (= 90)

Wir formulieren eine Aussage mit der Variablen x:

Es gibt eine positive rationale Zahl x: 0.92 * **x**+(600-**x**) * 0,00 = 0.15 * 600
(vereinfacht: 0.92 * **x** = 90)

Bedeutung von x: Masse der 92 %-igen Säure in Gramm

Um den Wahrheitsgehalt der letzten Aussage feststellen zu können, lösen wir die vereinfachte Gleichung per Hand:

$$0.92 \cdot \mathbf{x} = 90 \qquad | : 0.92$$
$$\mathbf{x} = 2250/23 \; (\approx 97.83)$$

Diesen mathematischen Wert setzen wir in die Gleichung für x ein:

0.92 * **2250/23** = 90

Linke Seite: 0.92 * **2250/23** = 90
Rechte Seite: 90
Vergleich: 90 = 90
Wahrheitswert des Vergleichs: wahre Aussage

Es bleibt uns die Untersuchung, ob die mathematische Lösung eine positive rationale Zahl ist.

Der Bruch **2250/23** ist eine Bruchzahl. Jede Bruchzahl stellt auch immer eine positive rationale Zahl dar. Die Aussage: **Es gibt eine positive rationale Zahl x:**
0.92 * **x**+(600-**x**) * 0,00 = 0.15 * 600 ist also für x = **2250/23** wahr.

Nun suchen wir durch *sinnvolles Runden* eine *praktische Lösung* für unsere Sachaufgabe.

Schritt: Runden im Sinne des Sachverhaltes
97.83 ≈ **98** (das vorläufige Ergebnis kann höchstens 2 zuverlässige Ziffern aufweisen).

Schritt: Testen der vorläufigen praktischen Lösung durch eine Probe am Text.

Grober Test: Unsere letzte Abschätzung 90 < x < 100 wird mit x := **98** erfüllt.

Textpassage / Folgerungen	**Teilergebnisse/Gesamtergebnis**
...92 %-iger Schwefelsäure...	**98** g einer 92 %-igen Schwefelsäure enthalten einen reinen Schwefelsäuregehalt von 90.2 g.
... mit Wasser mischen...	600 g **-** 98 g = 502 g Wasser enthält 0 g reine Schwefelsäure.
Die Mischung ergibt einen Säureanteil:	90, 2 g/ 600 g = 15 %
Zum Vergleich: ... 600 Gramm schwere 15 %-ige Schwefelsäure....	15 % = 15 % (wahre Aussage)

Antwortsatz: 98 g von der 92 %-igen Schwefelsäure sind notwendig, um eine 600 Gramm schwere 15 %-ige Schwefelsäure durch Mischung mit Wasser herstellen zu können.

Literaturverzeichnis

[1] Mathematik 7 (Niedersachsen-Ausgabe) Seite 220
Hahn/Dzewas; Westermann Schulbuchverlag GmbH Braunschweig 1989

[2] LS 8; Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium
(Ausgabe Baden-Würtemberg) Seite 38f.
August Schmid; Ernst Klett Verlag GmbH 1995

[3] „Math-College Dokumente/Zuordnung nach Programm“, Unterrichtshilfen für einen computerorientierten Mathmatikunterricht in der Sekundarstufe I;
Frank Schumann/Hartmut Henning; schumann´s verlagshaus 1998

Hinweise

Math-College Dokumente

Zuodnungen nach Programm

Frank Schumann & Hartmut Henning

Z7000 ... 34,80 DM Handreichung mit 156 Seiten

Z7001 ... 69,00 DM Schulkopierlizenz der Arbeitsblätter

Eine praktische Unterrichtshilfe zum Einstieg in einen computerorientierten Mathematikunterricht der Sek. I mit didkatischen Zielen, Intentionen und Vorschlägen zur methodisch-didaktischen Umsetzung. Mit vielen Zusatzdateien für DERIVE für Windows und CABRI Géomètre II für Windows auf Diskette. Im Mittelpunkt steht das Objekt Ursprungsgerade mit seinen geometrischen, algebraischen und numerischen Eigenschaften. In vielfältigen Anwendungsaufgaben lernen die Schüler die mannigfaltige Bedeutung dieses Objektes kennen. Der Computer wird hier im Gegensatz zu vielen anderen Materialien als ein integratives Unterrichtsmittel im umfassenden Sinne betrachtet und behandelt.

Grundkonstruktionen

Frank Schumann & Hartmut Henning

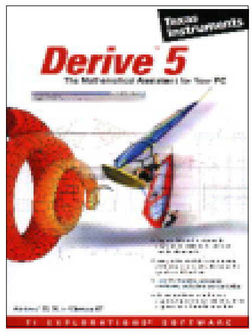
Z7003 ... 22,80 DM Begleitheft zur CD-ROM (56 Seiten)

Z7004 ... 75,80 DM CD-ROM

Dieses Thema wird all zu oft nur auf das Ausbilden von Zeichenfertigkeiten reduziert. Es ist aber bezeichnend für die wissenschaftliche Herangehensweise von Euklid, aber auch beispielhaft für den vernetzten Aufbau der Geometrieinhalte. Die Sammlung an Arbeitsblättern (im Winword-Format) und die mehr als 100 interaktiven Lernumgebungen (CABRI Géomètre II für Windows) stellen das algorithmische Denk- und Sprachbild des modernen Geometrieunterrichts in den Mittelpunkt. Die Demoversion von CABRI Géomètre II für Windows wird gleich mitgeliefert und ist für alle geforderten Interaktionen ausreichend.

CAS - Werkzeuge

DERIVE 5 für Windows



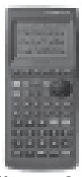
Der leistungsstarke Mathematik-Assistent für Ihren Personalcomputer zur symbolischen und numerischen Berechnung. 2- und 3-dimensionale Grafiken. Endlich auch elektronische Worksheets möglich. Bestens geeignet von der Mittelstufe bis zum Abitur aber auch für´s Studium oder den Beruf. (Upgrads und englischsprachige Lizenzen sind auf Anfrage erhältlich.)

Z41071 Lehrer-/Schüler-/Studentenlizenz m. Handbuch ... 154,00 DM
Z4107 Einzellizenz mit Handbuch .... 398,00 DM
Z41072 Schullizenz (alle PC einer Schule) m. 2 Handb. ... 744,00 DM
Z41073 Kopierlizenz für Schüler/Lehrer zur SL .... 39,50 DM
Z5567 zusätzliche Handbücher je.................................. 39,50 DM

Maple, Mathematica, MuPAD, LiveMath .... Tagespreis

CAS-fähige Taschenrechner wie

ALGEBRA FX 2.0 .... **TI-92plus** .... **TI-89** .... Tagespreis



Grafikrechner mit Computeralgebra, Tutor und Algebra-Assistent.

Mit großem Display, Speicherkapazität 128 kB RAM und 768 kB Flash-ROM.

Z6353 Algebra FX-2.0
Z63532 Overhead-Set
Z63515 FX-Link-KIT (PC)

CAS und DGS vereint.

QWERTY-Tastatur, großes kontraststarkes Display, über 500 kB Speicher, neue Advanced Mathematics Software 2.0, Flash-ROM.

Z6006 TI-92 plus
Z60052 TI-92 plus OHD-Kit

Grafikrechner mit CAS großes kontrastreiches Display, 640 kB Speicher, Flash-ROM-Technologie

Z6070 TI-89
Z60702 TI-89 Overhead-Kit
Z60012 TI-GraphLink Win95/98

Aktuelle Preise und Informationen im Internet!

math-college-shop.de
Goseriede 10 / 12 • D - 30159 Hannover
Fon 05 11 / 1 31 84 30 • Fax 05 11 / 1 31 84 36
eMail shop@math-college.de • Internet www.math-college-shop.de
Hot-Line 01 80 / 5 00 10 65